


# ఉప వేదాలు

## కళలు

# మెదడుకు పదును



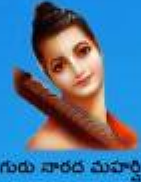


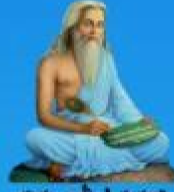
## సదాశివ సమారంభాం


గురు దక్షిణామూర్తి


గురు వేదవ్యాస మహర్షి


గురు శుక మహర్షి

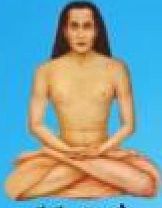

గురు నారద మహర్షి


గురు వాల్మీకి మహర్షి


గురు శ్రీకృష్ణ

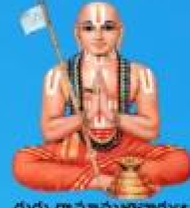
## శంకరాచార్య మధ్యమాం


గురు దత్తాత్రేయ


గురు బాబాజీ


గురు గౌతమ బుద్ధ


గురు ఆదిశంకరాచార్య

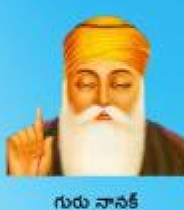

గురు రామానుజాచార్యులు


గురు జ్ఞానేశ్వర్


గురు రవిదాస్


గురు కబీర్ దాస్


గురు చైతన్య మహా ప్రభువు

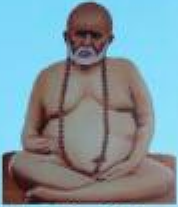

గురు నానక్


గురు రాఘవేంద్ర స్వామి


గురు వీరబ్రహ్మేంద్ర స్వామి


యోగి వేమన

## అస్మదాచార్య పర్యంతాం


గురు త్రైలింగ స్వామి


గురు లాహిరి మహాశయ



గురు రామకృష్ణ పరమహంస, అమ్మ శారదాదేవి


గురు వివేకానంద

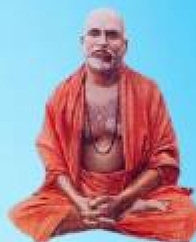

గురు సాయి బాబా


గురు అరబిందో


గురు రమణ మహర్షి


గురు యోగానంద


గురు భక్తివేదాంత ప్రభుపాద


గురు మళయాళస్వామి


గురు విద్యాప్రకాశానందగిరి


గురు చంద్రశేఖర పరమాచార్య

## వందే గురుపరంపరాం..




ఈ గ్రంధపు భారత ప్రభుత్వ డిజిటల్ లైబ్రరీ గుర్తింపు సంఖ్య: 2990100071442

## భారత ప్రభుత్వపు వెబ్ సైట్ - డిజిటల్ లైబ్రరీ అఫ్ ఇండియా

**http://www.new.dli.ernet.in**

Digital Library of India: Inc

www.new.dli.ernet.in

# Digital Library of India

Hosted by: Indian Institute of Science, Bangalore in co-operation with CMU, IIIT-H, NSF, ERNET and MCIT for the Govt. of India and 21 major participating centres.

Home | Vision | Mission | Goals | Benefits | Content Selection | Current Status | People | Funding | Copyright Policy | FAQ | RFP

Books Journals Newspapers Palm-Leaves (Manuscripts)

Title: Ramayanam
Author:
Year: to
Subject: Any Subject
Language: Telugu
Scanning Centre: Any Centre
Clear | Search

Presentations and Report
Statistics Report
Status Report
Feedback | Suggestions | Problems | Missing links or Books

Click here for PDF collection
DLI MIRROR at IUCAA Data Center PUNE

DLI

For the first time in history, the Digital Library of India is digitizing all the significant works of Mankind.

Click Here to know More about DLI New!

| Books | Journals | Newspapers | Manuscripts |
|---|---|---|---|
| Rashtrapati Bhavan<br>CMU-Books<br>Sanskrit<br>TTD,Tirupathi<br>Kerala Sahitya Akademi | INSA | Times of India<br>Indian Express<br>The Hindu<br>Deccan Herald<br>Eenadu<br>Vaartha | Tamil Heritage Foundation<br>AnnaUniversity NEW! |

**Title Beginning with.**

A B C D E F G H I J K L M N O P Q R S T U V W X Y Z

**Author's Last Name**

A B C D E F G H I J K L M N O P Q R S T U V W X Y Z

**Year**

1850-1900 | 1901-1910 | 1911-1920 | 1921-1930 | 1931-1940 | 1941-1950 | 1951-

**Subject**

Astrophysics | Biology | Chemistry | Education | Law | Mathematics | Mythology | Religion | For more subjects...

**Language**

Sanskrit | English | Bengali | Hindi | Kannada | Marathi | Tamil | Telugu | Urdu

# అతి విశిష్టం ఈ దానం!

స్వామి వివేకానంద

"దానాలలోకెల్లా ఆధ్యాత్మిక విద్యాదానం చాలా శ్రేష్ఠమైంది! దాని తరువాతిది లౌకిక జ్ఞానదానం, ప్రాణదానం, అన్నదానం" అని వ్యాసమహర్షి చెప్పారు.

మన ఆధ్యాత్మిక జ్ఞానం భారతదేశ హద్దులలో నిలిచి పోకూడదు. లోకమంతటినీ ఆవరించాలి! ఇలా లోకవ్యాప్తమైన ధర్మప్రచారాన్ని మన పూర్వులు చేశారు. హైందవ వేదాంతం ఎన్నడూ ఈ దేశం దాటి పోలేదని చెప్పేవారూ, మతప్రచారార్థం తొలిసారిగా, పరదేశాలకు వెళ్ళిన సన్న్యాసిని నేనే అని చెప్పేవారూ, తమ జాతిచరిత్ర నెరుగని వారే! ఇలాంటి సంఘటనలు ఎన్నోసార్లు జరిగాయి. అవసరమైనప్పుడల్లా, భారతీయ ఆధ్యాత్మిక జ్ఞానప్రవాహం వెల్లువలా లోకాన్ని ముంచెత్తుతూ వచ్చింది.



రాజకీయ ప్రచారాన్ని రణగొణధ్వనులతో, యోధులతో సాగించవచ్చు. అగ్నిని కురిపించి, కత్తిని ఝళిపించి, లౌకిక జ్ఞానాన్నీ, సంఘనిర్మాణ విజ్ఞానాన్నీ విరివిగా ప్రచారం చేయవచ్చు. కానీ ఆధ్యాత్మిక జ్ఞానదానం కళ్ళకు కనిపించకుండా, చెవులకు వినిపించకుండా కురుస్తూ, రోజా పువ్వుల రాసుల్ని వికసింపజేసే మంచులాగా నిశ్శబ్దంగా జరగవలసి ఉంది. భారతదేశం నిరాడంబరంగా, లోకానికి మళ్ళీ మళ్ళీ చేస్తూ వచ్చిన దానమిదే!

మిత్రులారా! నేను అవలంబించే విధానాన్ని తెలియజేస్తాను వినండి. భారతదేశంలోనూ, ఇతర దేశాల్లోనూ మన పారమార్థిక ధర్మాలను బోధించడానికి తగినవారుగా మన యువకుల్ని తయారు చేయడానికై భారతదేశంలో కొన్ని సంస్థలను నెలకొల్పాలి! ఇప్పుడు మనకు కావలసింది బలిష్ఠులు, జవసంపన్నులు, ఋజువర్తనులు, ఆత్మ విశ్వాసపరులు అయిన యువకులు. అలాంటి వారు నూరుమంది దొరికినా, ప్రపంచం పూర్తిగా పరివర్తన చెందగలుగుతుంది!!

ఇచ్ఛాశక్తి తక్కిన శక్తులన్నిటి కన్నా బలవత్తరమైంది. అది సాక్షాత్తూ భగవంతుని దగ్గరి నుండి వచ్చేదే కాబట్టి దాని ముందు తక్కినదంతా లొంగిపోవలసిందే. నిర్మలం, బలిష్ఠం అయిన 'ఇచ్ఛ' (సంకల్పం) సర్వశక్తిమంతమైంది. దానిలో మీకు విశ్వాసం లేదా? ఉంటే మీ మతంలోని మహోన్నత ధర్మాలను ప్రపంచానికి బోధించడానికై కంకణం కట్టుకోండి. ప్రపంచం ఆ ధర్మాల కోసమై ఎదురుచూస్తోంది. అనేక శతాబ్దాలుగా ప్రజలకు క్షుద్రసిద్ధాంతాలు నేర్పడం జరిగింది. వారు వ్యర్థులని ప్రపంచమంతటా బోధలు జరిగాయి. ఎన్నో శతాబ్దాల నుండి వారు ఈ బోధనల వల్ల భయభ్రాంతులై, పశుప్రాయులైపోతున్నారు. తాము ఆత్మస్వరూపులమనే మాటను వినడానికైనా వారెన్నడూ నోచుకోలేదు. "నీచాతినీచుడిలో కూడా ఆత్మ ఉంది. అది అమృతం, పరమ పవిత్రం, సర్వశక్తిమంతం, సర్వవ్యాపకమైనది" అని వారికి ఆత్మను గురించి చెప్పండి. వారికి ఆత్మవిశ్వాసాన్ని ప్రసాదించండి. ❖

మూలం: శ్రీ రామకృష్ణ ప్రభ - ఫిబ్రవరి 2014

# మెదడుకి పదును



డా॥ మహీధర నళినీ మోహన్

# మెదడుకి పదును

డా॥ మహీధర నళినీ మోహన్



విశాలాంధ్ర పబ్లిషింగ్ హౌస్
విజ్ఞాన భవన్, 4-1-435 బ్యాంక్ స్ట్రీట్
హైదరాబాద్-500 001

# నా మాట

దుప్పులు కొత్తగా వస్తున్న కొమ్ముల్ని చెట్ల మొదళ్ళకు వేసి కసిగా రుద్దుకుంటూ ఉంటాయి. ఆ కొమ్ముల చుట్టూ పూసినట్లున్న వెల్వెట్టుపొర పగిలి, రాలి పడిపోవడానికి అది అవసరం.

అప్పుడు వాటి కఠినమైన కొమ్ములు పదునై, కొసలు బయటపడి, ఈరెండలో మెరుస్తూ, సాటి మగలేళ్ళకి భయావహంగానూ, కురంగీ సమూహానికి ఆహ్వాన సూచకంగానూ కనబడతాయి.

పదును పెట్టుకోడానికి మనిషికి బుర్రమీద కొమ్ములు లేవుగానీ, బుర్రలోపల సరుకుంది. లేడి కొమ్ములమీద వెల్వెట్టు పొరలాగ, నిప్పుల మీద నివురులాగ ఆ మెదడు చుట్టూ అలసత్వపు పొర అవహించి ఉంటుంది. దానిని పగలగొట్టి మెదడుకి పదును పెట్టుకోవడం—సమర్థుల మనిపించుకోవాలని వాంఛించే వారందరికీ అవసరం. ఈ పనిలో తోడ్పడ గలిగిన అతి సున్నితమైన, అహ్లాదకరమైన, నాతిగూఢమైన సమస్యలు 45 ఈ గ్రంథంలో సంతరించాను. ప్రతీ సమస్యకీ జవాబు ఇవ్వడమేకాదు, ఆ జవాబును చేరుకోడానికి అవసరమైన తర్కాన్ని కూడా వివరించాను.

ఎటుకూడినా ఒకే మొత్తం వచ్చే మాయ చదరాల నిర్మాణ పద్ధతులు సవిస్తరంగా చూపించాను.

చదరంగబల్లమీద వెళ్ళిన గడిలోకి మళ్ళీ వెళ్ళకుండా గుర్రంచేత ఇష్టానుసారంగా గంతులు వేయించే ప్రక్రియలు ప్రదర్శించాను.

ఏకోశానా సంబంధంలేని పాల బిందెలనూ, బిలియర్డ్ బంతులనూ ఒకే గాటకట్టి, పాల కొలతల సమస్యను ఆశ్చర్యకరంగా సాధించే కిటుకు వివరించాను.

పొద్దు తిరుగుడు పువ్వులోని రేకులకి, సూర్యుడి చుట్టూ తిరిగే గ్రహాలకి విచిత్రమైన సంబంధం ఉందని కనబరచాను.

సరి సమానంగా ప్రేమిస్తూ వస్తున్న ప్రేయసు లిద్దరిలోనూ ఒకత్తికి అనుకోకుండా అన్యాయం చేసేశానే అని కుమిలిపోతున్న ఒక దక్షిణ నాయకుడిని ఇందులో నీ తప్పేమీ లేదని సముదాయించాను.

కంటికి కనిపిస్తున్నదంతా సత్యంకాదని "ప్రదక్షిణంలో గల్లంతు" "దగ్గరదారి" వంటి సమస్యలలో ప్రస్తావించాను.

"లంకెబిందెలు" సమస్యలో ఎడ్గార్ ఎల్లెన్‌పో, కోనన్ డైల్‌ల తర్కా దోరణులను వరవడిగా తీసుకున్నాను.

ప్రతీ వ్యాసంలోనూ ఏదో ఒక చమత్కృతి, రహస్య బేదనం, తర్క ప్రౌఢిమ కనిపిస్తాయి.

ఇటువంటి విలక్షణమైన సమస్యల మొదళ్ళతో మెదళ్ళకు పదును పెట్టుకోవాలనుకునే ఉత్సాహవంతులకి ఇవి నచ్చుతాయని నా ఆశ.

ఇందులోని 16 వ్యాసాలు 1966–67 సంవత్సరాలమధ్య ఆంధ్ర సచిత్ర వారపత్రికలో ప్రచురింపబడ్డాయి. మిగిలినవన్నీ అముంబితాలే.

ఈ గ్రంథాన్ని ఆసాంతమూ చదివేక మీలో కలిగిన భావాలనూ, తలయెత్తిన కొత్త సందేహాలనూ ఈ క్రింది ఎడ్రస్సుకి వ్రాయండి:

మహీధర నళినీమోహన్
174-C, M.I.G. Flat
Rajouri Garden
New Delhi - 110 027.

ఢిల్లీ,
ఫిబ్రవరి, 1989

# విషయసూచిక

# 1. చీకటి ముద్దు

అవి రెండవ ప్రపంచ యుద్ధం భీకరంగా జరుగుతున్న రోజులు.

అది జర్మనుల చేతజిక్కిన ఫ్రాన్సు భూభాగం.

ఒక రైలుపెట్టెలో నలుగురు వ్యక్తులు ప్రయాణం చేస్తున్నారు. వారిలో 20 ఏళ్ళ ఫ్రెంచిపిల్ల- చక్కనిచుక్క-ఒకర్తి.

45 ఏళ్ళు దాటిన ఫ్రెంచి మహిళ ఒకర్తి.

నడివయసు ఫ్రెంచివాడు ఒకడు.

మిలటరీ దుస్తులతో జర్మన్ ఆఫీసరు ఒకడు. వారందరు ఒకరికొకరు అపరిచితులు. వాళ్ళల్లో వాళ్ళు మాట్లాడుకోవడం లేదు కూడానూ. అందరూ తలో దిక్కుగానూ చూస్తున్నారు. రైలు పారిస్ నుంచి మార్సేల్స్ వైపుగా దూసుకుపోతుంది.

అంతలో ఆ రైలు ఒక సొరంగంలో ప్రవేశించింది. రైలు పెట్టెలో దీపాలు లేవు. ఒక్క నిముషంపాటు అంతా చిమ్మచీకటి. అంతలో ఎవరో ఎవరినో ముద్దుపెట్టుకున్న చప్పుడు, మరుక్షణంలో ఎవరో ఎవరినో ఛెళ్ళున లెంపకాయ కొట్టిన చప్పుడు వినిపించాయి.

అంతలో రైలు సొరంగం వదిలి బయటికి వచ్చేసింది. ఆ పెట్టెలోని నలుగురూ ఎవరి స్థలాలలో వారు ఉన్నారు. జర్మన్ ఆఫీసరు మాత్రం ఐదు వేళ్లూ అంటిన తన చెంపను నిమురుకుంటూ కనిపించాడు.

"మహబాగా జరిగిందిలే. లేకపోతే అందంగా వయస్సులో ఉందికదా అని మా దేశపు పిల్లని చీకట్లో ముద్దు పెట్టుకుంటాడా? ఫ్రెంచి ఆడకూతురి చేతికి ఎంత చురుకు ఉందో ఈ జర్మన్ గాడిదకి బాగా తెలిసి వచ్చిందిలే" అని తనలో తాను అనుకుంది ఆ నడివయస్సు స్త్రీ.

"ఈ జర్మన్ ఆఫీసరు చూసి చూసి రోడ్డురోలరులా ఉన్న ఆ ఆడమనిషిని ముద్దు పెట్టుకోవడం ఏమిటో? బహుశా నన్ను ముద్దు పెట్టుకుందామని చీకట్లో తెలియక ఆవిడని పెట్టుకున్నాడేమో. ఈపాటి సరసం అర్థంకాక ఆవిడ చెయ్యి విదిలించింది కాబోలు, పాపం!" అనుకుంది ఆ ఫ్రెంచి యువతి.

చెంపమీద చేతితో నిమురుకుంటూన్న ఆ జర్మన్ ఆఫీసరుకి అసలు ఏం జరిగిందో ముందర అర్థంకాలేదు. కొంత సేపు అయాక ఇల్లా జరిగిఉంటుందని ఊహించుకున్నాడు,

"బహుళా ఈ ఫ్రెంచివాడు ఆ అందగత్తెను తక్కున ముద్దు పెట్టుకుని ఉంటాడు. ఆ పిల్ల ఛెళ్లున చెంపకాయ కొట్టబోయి ఉంటుంది. చీకట్లో ఆ దెబ్బ గురితప్పి నాకు తగిలి ఉంటుంది.''

ఇప్పుడు సమస్య ఏమిటంటే —

ఆ ఫ్రెంచివాడు ఏమనుకున్నాడు?

అసలు ఏమి జరిగింది?

జవాబు :

ఆ ఫ్రెంచివాడు అండర్‌గ్రౌండు గెరిల్లా దళంలో సభ్యుడు. అతడికి ఆ జర్మన్ ఆఫీసరు అంటే పీకెలదాకా కసి ఉండడంలో ఆశ్చర్యం ఏమీలేదు. రైలు సొరంగంలో ప్రవేశించి, చిమ్మచీకటి అయిపోగానే అతడు తన చేతిని తానే చప్పుడయేలా ముద్దు పెట్టుకొని, జర్మన్ ఆఫీసరుని — సాచి లెంపకాయ కొట్టేడు.

*　　　*　　　*

# 2. కమలా జానకీయం

ఒకానొక పూలరంగడికి కరోల్‌బాగ్‌లో కమల అనే స్నేహితురాలూ జోర్‌బాగ్‌లో జానకి అనే స్నేహితురాలూ ఉన్నారు. శివుడికి గంగ మీదా, పార్వతిమీదా సరిసమానమైన ప్రేమ ఉన్నట్లు ఇతగాడికి తన యిద్దరు స్నేహితురాళ్ళమీదా సమానమైన ప్రేమ ఉంది. ఈ విషయంలో అతడి నిజాయితీని శంకించవలసిన అవసరం ఎంతమాత్రమూ లేదు. ఆ యిద్దరిలోను ఒకతె మీద ఎక్కువ మక్కువ చూపి, రెండవ ప్రేయసికి అన్యాయం చేసే దురుద్దేశం అతడికి ఏ కోశానా లేదు, నేను చెబుతున్నాగా! అతడికి ఆ యిద్దరూ రెండు కళ్ళవంటివారు. ఆ ఆద్దరిలోనూ ఎవతెనో ఒకర్తిని రోజుకి ఒక్కసారి చూడనిదే అతడు ఉండలేడు. ఈ రోజున ఫలానా అమ్మాయి దగ్గరకు వెళ్ళాలని ముందుగా ఏమీ నిర్ణయించుకోడు. ప్రతిరోజూ సాయంకాలం ఏ క్షణాన బుద్ధి పుడితే అప్పుడు నీటుగా కడిగిన ముత్యంలా తయారయి, తాను ఉంటున్న మద్రాసు హోటల్‌కి దగ్గరలో వున్న ఆరో నంబరు బస్ స్టాపుకి వస్తాడు. ఏ వైపు పోయే బస్సు ముందర వస్తే ఆ బస్సు ఎక్కేస్తాడు. జోర్‌బాగ్

పోయే బస్సు ముందరవస్తే ఆ రోజున జానకిని కలుసుకుంటాడు. కరోల్ బాగ్ పోయే బస్సు ముందరవస్తే ఆ రోజున కమలను చూస్తాడు. ఈ ప్రకారంగా పక్షపాతం రవ్వంత కూడా లేకుండా ఆ రంగడు దక్షిణనాయకత్వం వెలిగిస్తున్నాడు.

ఇక్కడ మరొక ముఖ్యమైన సంగతి పాఠకులకు విన్నవించాలి. మద్రాసు హోటలు బస్సుస్టాపులో నిలుచుని వాచీకేసి చూస్తూ ఉంటే సరిగ్గా 20 నిమిషాల కొక్కొక్క బస్సు జోర్‌బాగ్ వైపు వెళ్ళేది వస్తుంది. అల్లాగే సరిగ్గా 20 నిమిషాలకు ఒక్కొక్క బస్సు కోరల్ బాగ్ వైపు వెళ్ళేది వస్తుంది. (ఢిల్లీలో సిటీబస్సులు ఇంత నిక్కచ్చిగా రాకపోకలు సాగించడం నభూతో నభవిష్యతి అని కొట్టిపారేయకండి. ఆరో నంబరు బస్సులు 20 నిమిషాల కొక్కొక్కటి చొప్పున బహు నిక్కచ్చిగా నడుస్తున్నాయని అనుకుందాం మాటవరసకి).

రంగడు బస్సు స్టాపుకి వాచీ చూసుకుని రాడు. ఎప్పుడుతోస్తే అప్పుడు వచ్చేస్తాడు. ఏ బస్సు ముందర దొరికితే అది ఎక్కేస్తాడు. అయినప్పటికీ ఒక ఏడాది తరవాత లెక్క చూసుకుంటే కమల దగ్గరకు 324 సార్లూ, జానకి దగ్గరకు 36 సార్లూ వెళ్ళినట్లు తేలింది. ఇంతటి హెచ్చు తగ్గులు ఎల్లా వచ్చాయో అతనికి తెలియలేదు. అతడు అనుకున్న దేమిటంటే - కొంచెం ఇంచు మించుగా ఇద్దరి దగ్గరకీ చెరిసమానంగా వెళ్ళగలనని. కాని జరిగినది ఇదీ.

ఈ విచిత్ర సంఘటనకు కారణం ఏమిటో మీరు ఊహించగలరా? జానకికి అన్యాయం చేసేశానే యని మధన పడిపోతున్న రంగడి మనస్సుకి ఊరట కలిగించగలరేమో ప్రయత్నించరాదూ?

జవాబు :

పాపం, ఇది రంగడి తప్పు ఎంతమాత్రమూకాదు. బస్సు "టైమింగ్స్"లో ఉన్న చమత్కారం ఇది. కరోల్‌బాగుకీ, జోర్‌బాగుకీ వెళ్ళే బస్సులు టంచనుగా ఇరవయ్యేసి నిమిషాల కొక్కొక్కటి చొప్పున వస్తున్నమాట నిజమే. అందులో పొరబాటు ఏమీలేదు. కాని, మద్రాసు హోటలు స్టాపు దగ్గరకు ఆ బస్సులు సరిగ్గా ఏ సమయానికి చేరుకుంటున్నా యన్నది చాలా ముఖ్యమైన విషయం.

కరోల్‌బాగ్ పోయే బస్సులు మద్రాసు హోటలు దగ్గరకు సాయంకాలం 4.00 గంటలకూ, 4.20 కి, 4.40 కి, 5.00 కి, 5.20 కి....ఇలా ఇరవయ్యేసి నిమిషాల కొక్కొక్కటి చొప్పున వస్తున్నాయనుకుందాం, జోర్‌బాగ్ వెళ్లే

బస్సులు మద్రాసు హోటలు దగ్గరకు సాయంకాలం గం. 4.02 నిమిషాలకి 4.22 కి, 4.42 కి, 5.02 కి, 5.22 కి.... ఇల్లా ఇరవయ్యేసి నిమిషాల కొక్కొక్కటి చొప్పున వస్తున్నా యనుకుందాం. అంటే, కరోల్‌బాగ్ బస్సు కదిలిపోయిన 2 నిమిషాలకు జోర్‌బాగ్ పోయే బస్సు మద్రాసుహోటలు దగ్గరకు వస్తోంది.

అల్లాగే జోర్‌బాగ్ బస్సు కదిలిపోయిన 18 నిమిషాలకు కరోల్‌బాగ్ బస్సు మద్రాసు హోటలు దగ్గరకు వస్తుంది.

కనుక రంగడు జోర్‌బాగ్ వెళ్ళగలగాలంటే ఆ రెండు నిమిషాల వ్యవధిలోనూ - అంటే 4.00 కి 4.02 కి మధ్యగానీ, 4.20 కి 4.22 కి మధ్యగానీ, 4.40 కి 4.42 కి మధ్యగానీ; 5.00 కి 5.02 కి మధ్యగానీ బస్సు స్టాపుకి చేరుకోవాలి.

కరోల్‌బాగ్ వెళ్ళగలగాలంటే ఆ 18 నిమిషాల వ్యవధిలోనూ, అంటే 4.02 కి 4 20 కి మధ్యగానీ, 4.22 కి 4.40 కి మధ్యగానీ, 4.42 కి 5.00 కి మధ్యగానీ ...రంగడు బస్సుస్టాపుకి చేరుకోవాలి.

అంటే కరోల్‌బాగ్‌కి చేరుకోడానికి 18 నిమిషాల వ్యవధిలో ఎప్పుడైనా బస్సుస్టాపుకి రావచ్చుగానీ, జోర్‌బాగ్ చేరుకోవాలంటే ఆ 2 నిమిషాల వ్యవధిలోనే రావాలి. సరిగ్గా ఇదే నిష్పత్తిలో - అంటే 18:2 లేక 9:1 నిష్పత్తిలో అతడు కమలను, జానకినీ కలుసుకోగలడు.

18 : 2 = 324 : 36.

బస్సులు టైమింగులు ఈ విధంగా ఉంటేనే 9:1 నిష్పత్తిలో ఆ స్నేహితురాళ్ళను కలుసుకోవడం సాధ్యం అవుతుంది. ఇద్దరి దగ్గరకూ చెరి సమానంగా వెళ్ళగలగాలంటే కరోల్‌బాగ్ బస్సులు 4.00 కి, 4.20 కి, 4.40 కి, 5.00 కి ...ఇల్లా మద్రాసు హోటల్ దగ్గరకు వస్తూవున్నట్లయితే, జోర్‌బాగ్ బస్సులు 4.10 కి, 4.30 కి, 4.50 కి, 5.10 కి,....ఇల్లా వస్తూ ఉండాలి.

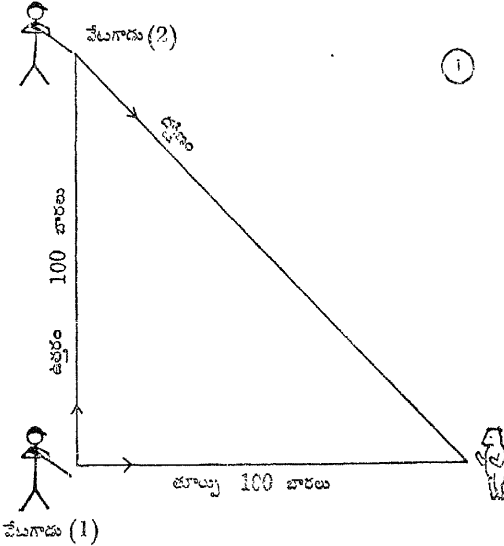
ఎంతెంత స్వల్ప విషయాలు ఎంతలేసి ఇబ్బందులకూ, అపార్థాలకూ, అనర్థాలకూ దారి తీయగలవో ఈ కమలా జానకీయం తెలియచెప్తుంది కదూ?

* * *

## 3. ఎలుగుబంటి వేట

లేళ్ళనూ, కుందేళ్ళనూ వేటాడడంలో సిద్ధహస్తుడైన వేటగాడొకడు ఎలుగుబంటిని వేటాడాలని ముచ్చటపడ్డాడు. తుపాకి తీసుకుని బయలుదేరేడు.

అంతలో హఠాత్తుగా - బహు సమీపంలో - 100 బారలు తూర్పుగా - ఒక పెద్ద ఎలుగుబంటి కనిపించింది. అంతదగ్గరలో అనుకోకుండా ఎదురైన




ఎలుగుబంటిని చూసి, హడలిపోయిన వేటగాడు పరుగు అందుకున్నాడు. కానీ ఆ భయంలో ఎలుగుబంటినుండి దూరంగా పారిపోవడానికి బదులు కంగారుగా ఉత్తరదిక్కుగా పరుగెత్తాడు. ఒక వంద బారలు పరుగెత్తి రొప్పుతూ వెనుదిరిగి చూశాడు. ఆ ఎలుగుబంటి కదలకుండా ఇంతకు ముందున్న చోటనే నిలుచుని ఉంది.

వేటగాడు ధైర్యం పుంజుకుని, దక్షిణదిశగా తుపాకి బారుచేసి, ఎలుగుబంటిని కొట్టి చంపేశాడు.

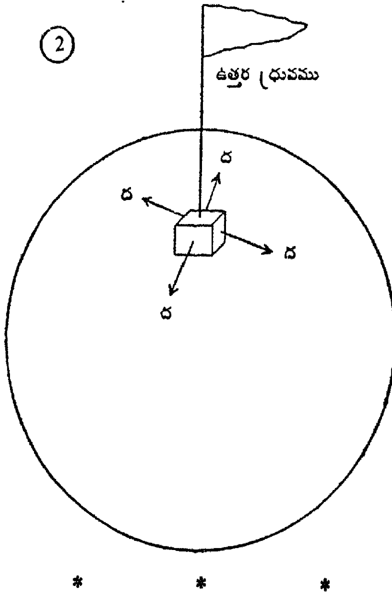
సమస్య అంతా జాగ్రత్తగా విన్నారు కదూ? అయితే, ఇప్పుడు చెప్పండి ఆ ఎలుగుబంటి ఏ రంగుది?

జవాబు :

ఆ ఎలుగుబంటి తెల్లనిది.

ఎందుచేతనంటే- ఈ సంఘటన ఉత్తర ధ్రువం దగ్గరమాత్రమే సాధ్యం అక్కడ నిలుచుని ఎటువైపుగా చూసినా దక్షిణమేకదా?

ఉత్తర ధ్రువం దగ్గర నివసించే ఎలుగుబంటి రంగు తెలుపే కదా?




* * *

# 4. మంత్రి పదవి

మదుర నేలిన విజయరాఘవరాయలకి తెలివైన మంత్రి కావలసి వచ్చాడు. పూర్వం నరసింహరాయలు తిమ్మరుసును ఎన్నుకున్న కథలు జ్ఞాపకం వచ్చాయి. తాను కూడా అటువంటి యుక్తిలెక్కలు కొన్ని ఇచ్చి, సరియైన జవాబులు చెప్పినవాడికి మంత్రి పదవి నిస్తానన్ని చాటింపు వేయిస్తే? అవును. అదే సరియైన పద్ధతి. ఆలోచించి కొన్ని యుక్తి లెక్కలు తయారుచేశాడు.

"120 తులాల లోపున ఎన్ని తులాల సరుకు కావాలన్నా తూచి ఇవ్వ గలగాలంటే వర్తకుడి దగ్గర ఏయే రకపు తూనికరాళ్ళు కనీసం ఎన్ని ఉండాలి?"

చాలామంది 1, 2, 2, 5, 10, 20, 40, 40 తులాల బరువులుగల ఎనిమిది తూనికరాళ్ళు అవసరమని సమాధానాలు పంపించారు. కాని, వెంకప్ప అనేవాడు మాత్రం విచిత్రమైన సమాధానం వ్రాసి పంపించాడు.

"ఏలినవారి ప్రశ్న కొంత సందిగ్ధంగా ఉంది. దీనికి రెండు విధాలుగా సమాధానాలు చెప్పవచ్చు.

"తూచవలసిన వస్తువును ఒక సిబ్బిలోనూ, తూనిక రాళ్ళను రెండవ సిబ్బిలోనూ పెట్టితీరాలనే నియమం కనుక ఉన్నట్లయితే 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64 తులాల బరువులుగల ఏడు తూనికరాళ్ళు చాలు. ఉదాహరణకు, 53 తులాలు తూచాలంటే 1, 4, 16, 32 తులాల రాళ్ళు వాడాలి. 71 తులాల తూచాలంటే 1,2,4,64 తులాల రాళ్ళు వాడాలి. ఇట్లాగే 127 తులాల లోపున ఎన్ని తులాల బరువు తూచి ఇవ్వాలన్నా ఈ ఏడు రాళ్ళూ చాలు. ఇంతకన్న తక్కువ సంఖ్య తూనిక రాళ్ళు ఉపయోగించడం సాధ్యంకాదు.

"ఇక రెండవ సమాధానం: తూనిక రాళ్ళను రెండు సిబ్బెలలోనూ పెట్టవచ్చునని అంగీకరిస్తే 1, 3, 9, 27, 81, తులాల బరువులుగల ఐదు తూనికరాళ్ళు చాలు. ఉదాహరణకు 53 తులాల సరుకు తూచి ఇవ్వాలంటే- వస్తువును ఉంచే సిబ్బిలో 27 తులాల రాతినీ, ఒక తులం రాతిని ఉంచి రెండవ సిబ్బిలో 81 తులాల రాతిని ఉంచాలి. 81-27-1=53 కనుక తూగిన సరుకు బరువు 53 తులాలకు సమానం. ఇట్లాగే 121 తులాల లోపున ఎంత సరుకు కావాలన్నా ఈ ఐదు రాళ్ళతోనూ తూచి ఇవ్వవచ్చు. ఇంతకన్న తక్కువ సంఖ్య రాళ్ళు వాడడం అసాధ్యం."

వెంకప్ప పంపిన సమాధానం సమగ్రంగా ఉండడమేకాకుండా తానిచ్చిన సమస్య సందిగ్ధంగా ఉంది అని చెప్పగలిగిన దిట్టతనం కూడా కనిపించి రాజు ఆశ్చర్యచకితుడయాడు. వెంటనే పల్లకి పంపించి, వెంకప్పను తన సన్నిధికి రప్పించుకుని ఘనంగా సత్కరించి, మరొక సమస్య ఇచ్చాడు.

* * *

# 5. వెండి – బంగారం

మధురనేలిన విజయ రాఘవరాయలు వెంకప్పకి రెండవ సమస్య ఇచ్చాడు.

బల్లమీద ఒకే ఆకారంలో ఉన్న మూడు డబ్బాలున్నాయి. ఒక డబ్బాలో రెండు బంగారు నాణెములు, రెండవ డబ్బాలో రెండు వెండినాణెములు, మూడవ డబ్బాలో ఒక బంగారునాణెము, ఒక వెండినాణెమూ ఉన్నాయి. ఆ నాణెముల సైజు, ఆకారము అంతా ఒక్కటే. వాటి బరువుల బేధాలు చేతితో ముట్టుకుచూస్తే తెలియనంత స్వల్పం. కంటితోచూస్తేకాని అది ఏ నాణెమో చెప్పలేరు. ఏ డబ్బాలో ఏయే నాణెములున్నాయో తెలియడానికి ఆ డబ్బాల మూతలమీద "బంగారు-బంగారు" "వెండి-వెండి" "బంగారు-వెండి" అని వ్రాశారు కాని, కావాలని రాజు ఆ డబ్బాల మూతలన్నీ తారుమారు చేసేశాడు. ఇప్పుడు మూతల మీద వ్రాసి ఉన్నది ఒక్కటీ నిజం కాదు.

ఇప్పుడు చేయవలసిన దేమిటంటే, ఆ మూడు డబ్బాలలోనూ ఏదో ఒక్క దాని మూత తెరచి, లోపల ఏముందో చూడకుండా, చెయ్యి పెట్టి ఒక్కనాణెమును బయటికితీసి చూడవచ్చు. ఆ ఒక్క నాణెమును మాత్రమే చూసి ఆ మూడు డబ్బాలలోనూ ఎందులో ఏయే నాణెములున్నాయో చెప్పగలగాలి. అదీ సమస్య.

వెంకప్ప ఆమూడు డబ్బాలనూ పరకాయించి చూచాడు - వాటిలో ఏ డబ్బాలో చెయ్యి పెడితే వీలో ఆలోచించాడు. ఆఖరికి "బంగారు-వెండి" అని వ్రాసివున్న డబ్బామూత తెరచి, ఒక నాణెమును బయటకి తీశాడు. చూడగా అది బంగారునాణెం. ఆ డబ్బాలో ఉండిపోయిన రెండవ నాణెం వెండిది అయి ఉండకూడదు. ఏమంటే, అప్పుడు ఆ మూతమీద వ్రాసిఉన్న "బంగారు-వెండి" అన్నవ్రాత నిజమై ఊరుకుంటుంది. మూతలు అన్నీ తారుమారు అయాయని, మూతల మీది వ్రాతలో ఏ ఒక్కటి సరిగ్గా లేదని కదా చెప్పేరు? కనుక ఆ డబ్బాలో ఉండిపోయిన నాణెం బంగారపుదే అయిఉండాలి.

ఈ సంగతి తెలిశాక "వెండి-వెండి" అని వ్రాసి ఉన్న డబ్బాలో ఏముంటాయో సులభంగా చెప్పవచ్చు. అందులో ఉన్నవి రెండూ వెండి నాణెములు అయి ఉండటానికి వీలులేదు. ఏమంటే, అప్పుడు మూతమీది వ్రాత నిజం అవుతుంది. అందులోనివి రెండు బంగారు నాణెములు అవడానికి కూడా వీలులేదు, ఏమంటే, అంతకుముందే రెండు బంగారు నాణెములున్న డబ్బా దొరికింది కదా? కనుక ఈ డబ్బాలో ఒకటి బంగారు నాణెము, రెండవది వెండి నాణెము అయి ఉండాలి.

ఇంక మూడవ డబ్బాలోని రెండూ వెండి నాణెములే అని వేరే చెప్పాలా?

ఈ విధంగా ఏ డబ్బాలో ఏయే నాణెములున్నాయో చెప్పవచ్చు.

ఒకవేళ మొదటిసారి "బంగారు-వెండి" అని వ్రాసి ఉన్న డబ్బాలో చెయ్యి పెట్టి బయటికితీసిన నాణెం వెండిది అయినాసరే, సరిగ్గా ఇదే విధమైన తర్కంతో ఏ డబ్బాలో ఏమున్నదో తెలుసుకోవచ్చు.

వెంకప్ప తర్కం విని, రాజా శిరఃకంపం చేసి, దుశ్శాలువలు బహూక రించాడు.

*　　　　*　　　　*

# 6. వెంకప్ప తర్కం

మధురనేలిన విజయ రాఘవరాయలు తెలివైన మంత్రికోసం పోటీలు జరుపుతున్న సందర్భంలో ఈ సంఘటన జరిగిందని చెప్పుకుంటూ ఉంటారు.

ఆనాడు పెద్దయ్య, తిమ్మయ్య, వెంకప్ప అనే ముగ్గురు మేధావులు పోటీ చేశారు. రాజా ఆ ముగ్గురునీ ఒకరి వెనుక ఒకరిని కూర్చోబెట్టేడు. ముందర వెంకప్ప కూర్చున్నాడు. అతని వెనుక తమ్మయ్య అతని వెనుక పెద్దయ్య కూర్చున్నారు. పెద్దయ్యకు తనముందర కూర్చున్న తిమ్మయ్య, వెంకప్పలు కనిపిస్తున్నారు. తిమ్మయ్యకు వెంకప్ప మాత్రం కనిపిస్తున్నాడు. వెంకప్పకు ఎవ్వరూ కనబడడం లేదు.

ఈ విధంగా ముగ్గురినీ కూర్చోబెట్టి, ఐదు తలపాగాలు తెప్పించి వారికి చూపించాడు రాజా. అందులో మూడు నల్లనివీ రెండు తెల్లనివీనూ.

"వీటిలో మాకు తోచినవేవో మూడు తలపాగాలు తీసి మీ తలల మీద ఉంచుతాము. మీరెవ్వరూ వెనుదిరిగి చూడరాదు. తన తలమీద ఉన్న పాగా రంగును తెలుసుకోగలిగినవారు నెగ్గినట్లుగా బావిస్తాం" అని రాజా సంజ్ఞచెయ్యగా సేవకుడు వచ్చి, వారి ముగ్గురికీ ముందుగా కళ్ళగంతలు కట్టేడు. రాజా నిర్ణ యించిన తలపాగాలు వారి తలలకు పెట్టి, కళ్ళకు గట్టిన గంతలు తొలగించాడు.

రాజా ముందుగా పెద్దయ్యను ప్రశ్నించాడు: "మీ తలకు చుట్టిన పాగా ఏ రంగుదో చెప్పగలరా?"

పెద్దయ్య తనకు తెలియదని ఒప్పుకున్నాడు.

తరువాత తిమ్మయ్యను కూడా అదే ప్రశ్న వేశాడు రాజా. తిమ్మయ్య కూడా తనకు తెలియదని ఒప్పుకున్నాడు. ఆఖరున వెంకప్పనూ అదే ప్రశ్న వేశాడు రాజా.

"తెలిసింది ప్రభూ! నా తలపాగా నల్లనిది" అన్నాడు వెంకప్ప.

నిజంగా వెంకప్ప తలకు చుట్టినది నల్ల తలపాగాయే!

రాజు మెప్పుదలగా తల ఊపేడు. "దానికి కారణం తెలియజేస్తే సంతోషంగా వింటాం" అన్నాడు .

వెంకప్ప తన తర్కాన్ని ఇల్లా వివరించాడు:

''మీ వద్ద ఉన్నవి మొత్తం 5 పాగాలు. అందులో మూడు నల్లనివి, రెండు తెల్లనివీనూ. పెద్దయ్యగారు తన ముందర కూర్చున్న తిమ్మయ్యగారి తలమీద, నా తలమీదా ఉన్న పాగాలను చూశారు. మా ఇద్దరివీ కూడా తెల్లనివే అయి ఉంటే, తన తలమీద ఉన్నది నల్లనిపాగా అని పెద్దయ్యగారికి వెంటనే తెలిసి ఉండేది. కాని, వారు తమ పాగా రంగు తమకు తెలియదు అన్నారు. అంటే, మా ఇద్దరి పాగాలూ నల్లనివేనా అయి ఉండాలి; లేదా ఒకటి నల్లనిదీ మరొకటి తెల్లనిదీ అయి ఉండాలి అని గ్రహించాను. ఈ సంగతి తిమ్మగారి మేధస్సుకి కూడా అందే ఉంటుంది, సందేహం లేదు.

"తరువాత తిమ్మగారికి నా ఒక్కడికి తలపాగా మాత్రమే కనిపించింది. నాది తెల్లనిపాగా అయి ఉంటే, తన తలమీదిది నల్లనిపాగా అని ఆయన వెంటనే చెప్పగలిగి ఉండేవారు. కానీ, ఆయన చెప్పలేక పోయారు అంటే నా పాగా నల్లనిది అనేకదా అర్థం?

"ఈ విధంగా నా తలపాగా రంగు నల్లనిది అని తెలుసుకోగలిగాను ఇందులో నా గొప్ప ఏమీలేదు. వారిరువురిలో ఎవరు నా స్థలంలో కూర్చున్నా వారికీ సంగతి తప్పకుండా తెలిసి ఉండేది."

''సెబాష్!" అన్న మెచ్చికోలు అనుకోకుండానే రాజు నోటివెంట వచ్చేసింది.

*   *   *

## 7. నల్లబొట్లు – తెల్లబొట్లు

మధుర నేలిన విజయ రాఘవరాయలు తెలివైన మంత్రికోసం పోటీలు జరుపుతున్న సందర్భంలో జరిగిన మరో సంఘటన ఇది.

ఆనాడు సభాభవనం ప్రేక్షకులతో కిటికిటలాడుతోంది. మంత్రి పదవిని కోరివచ్చిన పెద్దయ్య, తిమ్మయ్య, వెంకప్ప తమ తమ ఆసనాలలో కూర్చుని ఉన్నారు.

అప్పుడు వారు ముగ్గురునీ ఉద్దేశించి రాజు ఇల్లా అన్నాడు:

"ఇంకొక్క సమస్య మిగిలివుంది. కళ్ళకు గంతలు కట్టి మిమ్మల్ని మరోసారి శ్రమ పెట్టబోతున్నందుకు క్షంతవ్యులం. మీకు తెలియకుండా

మీ నుదుటమీద నల్లబొట్టు గానీ తెల్లబొట్టు గానీ పెడతాం. ఆ తరువాత మీ కళ్ళకు కట్టిన గంతలు విప్పేస్తాం. మీలో ప్రతి ఒక్కరికీ మిగిలిన ఇద్దరి ముఖాలమీద ఉన్న బొట్లు ఏయే రంగులవో తెలుస్తూనే ఉంటుంది. ఎదుటి వారిలో ఎవరి ముఖం మీదనైనా నల్లబొట్టును చూచిన వ్యక్తి తన చేతిని పైకెత్తాలి; ఇది నియమం. తన ముఖం మీద ఉన్నబొట్టు ఫలానా రంగుది అని ముందుగా ఎవరు చెప్పగలుగుతారో వారు ఈ పరీక్షలో నెగ్గినట్లుగా నిర్ణయిస్తాం" అని చెప్పి, వారి ముగ్గురి కళ్ళకూ గంతలు కట్టించి, అందరి ముఖాలమీదా నల్లని బొట్టులే పెట్టించి, కళ్ళగంతలు విప్పించాడు రాజు.

ముగ్గురూ ఒకరి ముఖాలు ఒకరు చూసుకున్నారు. అందరూ ఒక్కసారే చేతులు పైకెత్తేరు.

అందరికన్న ముందుగా వెంకప్ప రాజుకేసి తిరిగి "నా నుదుటిమీద బొట్టు నల్లనిది ప్రభూ!" అన్నాడు.

ఈ విషయాన్ని వెంకప్ప ఎల్లా గ్రహించాడు చెప్మా అని అక్కడ చేరిన వారంత ఆశ్చర్యపడ్డారు. రాజుగారి కోరికమీద వెంకప్ప తన తర్కాన్ని ఇల్లా వివరించాడు:

"కళ్ళకు కట్టిన గంతలు విప్పగానే పెద్దయ్య, తిమ్మయ్యగారల ముఖాల మీద నల్లబొట్టు ఉండడం గమనించి నేను చేయి పైకెత్తేను. నా ముఖం మీద ఉన్నది తెల్లబొట్టు అనుకుందాం మాటవరసకి. అప్పుడు పెద్దయ్యగారికి తన నుదుట ఉన్నది నల్లబొట్టు అని తెలిసిపోతుంది; ఎల్లాగంటే - పెద్దయ్యగారి నుదుట నున్నది తెల్లబొట్టే అయితే తిమ్మయ్యగారు చెయ్యెత్తి ఉండరు. అల్లాగే తిమ్మయ్యగారికి కూడా ఇదే తర్కాన్ని అనుసరించి తన నుదుట నున్నది నల్ల బొట్టు అని తెలిసిపోయి ఉండును. వారిద్దరూ కూడా తమ ముఖాలమీది బొట్టు నల్లనిది అని చెప్పలేకపోయారంటే నా ముఖం మీదిది తెల్లబొట్టు కాదనే కదా అర్థం. కనుక నాది నల్లబొట్టు అని చెప్పగలిగేను."

వెంకప్ప బుద్ధినైశిత్యానికి రాజు బ్రహ్మానందపడ్డాడు. వెంటనే అతడికి మంత్రిపదవి నిచ్చినట్లు ప్రకటించాడు.

* * *

# 8. రాజద్రోహం

మధురనేలిన విజయరాఘవ రాయలు తన రాజ్యాన్ని పది మండలాలుగా విభజించాడు. ఒక్కో మండలానికి, ఒక్కొక్క మండలాధిపతిని నియమించాడు.

ఏటా ప్రజల దగ్గరనుంచి పన్నులు వసూలు చేసి, ఆ డబ్బునంతా తులం తులం బరువున్న బంగారు కాసులుగా మార్చి, సంచులలో వేసి, రాజువద్దకు పంపిస్తూ ఉంటారు మండలాధిపతులు.

ఆ ఏడు వసూళ్ళు బాగా అయాయి. ఊహించిన దానికన్న అధికంగా ధనం సమకూడిందని రాజు చాలా ఉషారుగా ఉన్నాడు. అంతలో విచ్చుకత్తులతో బయట పహరా ఇస్తున్న సైనికులు ఒక నడివయస్సు మనిషిని రాజుదగ్గరకు తెచ్చేరు.

"వీడెవడో కాని ఏలినవారి దర్శనం కావాలనీ, తనవల్ల దేవరకి చాలా లాభం కలుగుతుందనీ గొడవ చేస్తూ ఉంటే తీసుకువచ్చాం ప్రభూ!"

"ఎవరు నువ్వు? ఏం కావాలి నీకు?" అన్నాడు రాజు.

"ఏలిన వారికి ఒక రహస్యవార్త అందజేయాలని వచ్చాను" అన్నాడు ఆ కొత్తవ్యక్తి. రాజు సంజ్ఞ చేయగా సైనికులు బయటికి వెళ్ళిపోయారు.

"నీవు చెప్పదలుచుకున్న దేమిటో నిర్భయంగా చెప్పవచ్చు."

ఆ వ్యక్తి భయం భయంగా అటు ఇటూ దిక్కులు చూశాడు. "తమ మండలాధిపతులలో ఒకడు రాజద్రోహి ప్రభూ! అతడు పంపిన కాసులు తులం బరువు లేవు. ప్రతి నాణెమూ తులంలో పదోవంతు తక్కువ."

రాజు కళ్ళు జేవురించాయి.

"ఈ సంగతి నీకెలా తెలుసు?"

"ఏలినవారు అభయం ఇస్తే నిజం చెప్పేస్తాను."

"నీకు వచ్చిన భయం లేదు. దాచకుండా నిజం చెప్పు"

"ఈ పని చెయ్యడంలో నా సాయం తీసుకున్నాడు ఆ మండలాధిపతి. నాకు చాలా డబ్బు ఇస్తానని ఆశ పెట్టి, చివరకి నన్నూ మోసం చేశాడు."

రాజు మీసం మీద చెయ్యివేశాడు.

"ఆ మండలాధిపతి పేరు ఏమన్నావు?"

ఆ వ్యక్తి ఏదో చెప్పబోయాడు. అంతలో ఒక బాకు రివ్వున వచ్చి అతడి వీపులో లోతుగా గుచ్చుకుంది. అతడు కుప్పలా నేల కూలిపోయాడు. అంతే - మరి లేవలేదు.

బాకుని విసిరిన వ్యక్తి ఎవరోకాని, ఎంత వెతికినా దొరకలేదు.

వెంటనే రాజు వెంకప్ప మంత్రికి కబురు పెట్టాడు. ఇద్దరూ కలసి ఖజానాకి వెళ్ళేరు. అదృష్టవశాత్తూ ధనపుసంచులు ఇంకా తెచ్చినవి తెచ్చినట్లే ఉన్నాయి సీళ్ళు పగలగొట్టి, కాసులన్నీ కలిపేసి ఉంటే ఆ రాజద్రోహిని పట్టుకోవడం సాధ్యమే కాకపోను. ఇప్పుడు ప్రతి సంచిలో నుంచీ ఒక్కొక్క

కాసు తీసి, వేరు వేరుగా తూచి, ఏ సంచిలోని కాసులు తులం బరువుకి తగ్గలో ఉన్నయో తెలుసుకోవడం కష్టమేమీ కాదు. అంతటి సున్నితమైన త్రాసు కోటలో లేకపోలేదు.

"కాని...." అని ఆగిపోయాడు వెంకప్ప.

"అమాత్యులు ఎందుకో సందేహిస్తున్నట్లున్నారు" అన్నాడు రాజు.

"మరేమీ లేదు ఒక్కొక్క సంచిలో నుంచి ఒక్కొక్క కాసును తీసి, వేరు వేరుగా తూచాలంటే పదిసార్లు తూచవలసి వస్తుంది. అనవసరమైన కాల విలంబన అని నా ఉద్దేశం."

"ఇంతకన్న త్వరగా దొంగకాసుల్ని పట్టుకునే పద్ధతి ఉంటే సెలవు ఇప్పించండి" అన్నాడు రాజు.

"ఒకే ఒక్క తూనికతో నకిలీ కాసులు ఏ సంచీలో ఉన్నాయో తెలుసు కోవచ్చు."

రాజు ఆశ్చర్యంనుంచి తేరుకునేలోగానే వెంకప్ప పది మండలాధి పతులు పంపించిన పది సంచుల మూతులూ విప్పేడు. మొదటి సంచీలో నుంచి ఒక కాసు, రెండవ సంచిలో నుంచి రెండుకాసులూ, మూడవ సంచిలో నుంచి మూడుకాసులూ.... పదవ సంచిలో నుంచి పది కానులూ - మొత్తం 55 కాసులు తీసి, అన్నిటినీ కలిపి తక్కెడలో ఒకవైపు ఉంచి, మొత్తం ఎంత బరువు ఉన్నాయో తూచాడు.

సరిగ్గా 54 $\frac{7}{10}$ తులాలు తూగింది. "మూడో సంచీలోని కాసులు నకిలీవి" అని తన నిర్ణయాన్ని తెలియజేశాడు వెంకప్ప.

రాజుకి మరింత ఆశ్చర్యం కలిగింది. వెంకప్ప తన తర్కాన్ని వివరించాడు:

ఒక్కొక్క కాసు సరిగ్గా తులం బరువు ఉండాలి. అన్ని సంచుల లోనూ సరియైన కాసులే ఉండి ఉంటే నేను తీసిన 55 కాసుల మొత్తం బరువు 55 తులాలు ఉండాలి. కాని, 54 $\frac{7}{10}$ తులాలు మాత్రమే తూగింది. అంటే తులంలో $\frac{3}{10}$ వ వంతు తక్కువ ఉంది. నకిలీకాసుల బరువు తులంలో పదో వంతు తక్కువ అని మనకు తెలుసు. తక్కువగా ఉన్న $\frac{3}{10}$ తులాల బరువు

మూడు నకిలీ కాసులకు సంబంధించినది అని తెలుస్తోంది. మూడు కాసులను నేను మూడవ సంచిలోనుంచి తీసుకున్నాను. కనుక అందులో ఉన్నవే నకిలీ కాసులు."

మూడవ మండలాధిపతి మల్లన్న తల మరునాటికల్లా కోట కొమ్మలకు వేలాడింది.

*　　*　　*

# 9. రేషనింగు

బియ్యానికీ, పంచదారకీ, గోధుమపిండికీ. కిరసనాయిలుకీ....ఒక టేమిటి దేనికిపడితే దానికి రేషనింగువచ్చి, క్యూలలో నిలుచోలేక సతమత మవుతున్న పాఠకులకు శ్రమ తెలియకుండా ఉండగలందులకు రేషనింగుకి సంబంధించిన చిత్రమైన కథ ఒకటి చెబుతాను. భేతాళుడు విక్రమార్కుడికి చెప్పినట్లు, ఆ కథ లలో లాగే ఇందులో కూడా మీరు కాస్త ఆలోచించి జవాబు చెప్పవలసి ఉంటుంది. కాని ఒక్కటే తేడా - సమాధానం చెప్పకపోతే బుర్ర పగిలిపోయే ప్రమాదం ఇందులో లేదు!

మొదటి ప్రపంచ యుద్ధంలో జర్మనీ చిత్తుగా ఓడిపోయిన తరువాత ఆ దేశపు ఆర్థికస్థితి బాగా పాడయిపోయింది. తిండిసరుకులు అన్నిటికీ రేషనింగు వచ్చేసింది. ప్రతి మనిషికీ రోజుకు 200 గ్రాముల బ్రెడ్ ఇవ్వాలని నిశ్చయిం చారు. దేశంలోని బేకరీలన్నీ సరిగ్గా 200 గ్రాములు పట్టే గిన్నెల వంటి అచ్చులు తయారుచేసి, వాటిలో పిండివేసి, రేషను రొట్టెలు తయారుచేసి, మనిషికి రోజుకి ఒకటి చొప్పున ఇస్తున్నారు, సంతకం పెట్టించుకుని

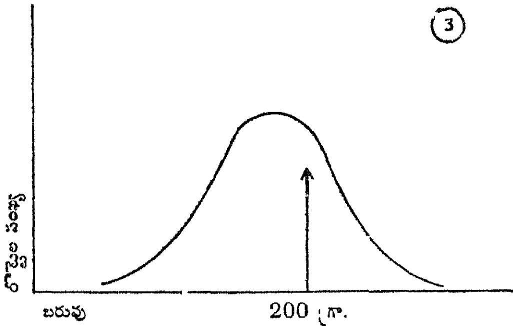
యూనివర్సిటీలో ఫిజిక్సు ప్రొఫెసరుగా పనిచేస్తున్న డాక్టర్ కార్ల్ ప్రతి రోజూ యూనివర్సిటీకి వెడుతూ దారిలోనేవున్న తన బేకరీ దగ్గర ఆగి, తనకు రావలసిన రొట్టె తీసుకుని వెళ్ళిపోతూ ఉండేవాడు.

ఒకనాడు ఉన్నట్లుండి ఆ ప్రొఫెసరుగారికి బోలెడంత కోపం వచ్చింది. బేకరీ యజమానితో ఇలా అన్నాడు: "ఏమయ్యా! నువ్వు పట్టిమోసగాడిలా ఉన్నావే? 200 గ్రాముల రొట్టె తయారుచేసే అచ్చులకి బదులు, అంతకు 5 శాతం తక్కువ అచ్చులతో నువ్వు రొట్టె తయారు చేస్తున్నావు. ఆ మిగిలిన పిండిని బ్లాకులో అమ్ముకుంటున్నావు" అనేశాడు నిర్మొహమాటంగా, ముక్కుకి సూటిగా, మాటలకి తడుముకోకుండా

ఆ బేకరీ యజమాని బిత్తరపోయాడు. "ఎంతమాట అన్నారు సార్? ఖచ్చితంగా 200 గ్రాముల పిండి వెయ్యాలంటే ఎలా సాధ్యం బాబూ?

ఒక్కొక్కప్పుడు పిండి కాస్త ఎక్కువా పడవచ్చు, ఒక్కొక్కప్పుడు కాస్త తక్కువా పడవచ్చు."

"కరెక్ట్! నువ్వు చెప్పినది అక్షరాలా నిజం. 200 గ్రాములకి కాస్త ఎక్కువగానీ, కాస్త తక్కువగానీ పడుతూ ఉండవచ్చు. గత మూడు మాసాల నుంచీ నువ్వు నాకిస్తున్న రొట్టెని మా లేబరేటరీలో ఉన్న బహుసున్నితమైన త్రాసులో తూచుతూ వచ్చాను ప్రతిరోజూనూ. నువ్వు అన్నట్లు వాటి బరువులలో స్వల్పమైన భేదాలున్నాయి. రొట్టెల సంఖ్యకి, వాటి బరువులకీ, గ్రాఫుగీశాను చూడు. (3 వ బొమ్మ.)




కొన్ని రొట్టెలు 185 గ్రాములు, కొన్ని 205 గ్రాములూ కూడా తూగేయి కాని, అత్యధిక సంఖ్యలో రొట్టెల బరువు 200 గ్రాములు ఉండడానికి బదులు 190 గ్రాములు మాత్రమే ఉంది. అంటే, నువ్వు ఉపయోగించే అచ్చులు 5% తప్పు అన్నమాట. అవి 200 గ్రా. కి బదులు 190 గ్రా. లకి దరిదాపులో ఉండి ఉంటాయి కనుక, ఈ తప్పుడు అచ్చులు కుళ్ళుకాలవలో పారేసి, సరిగ్గా 200 గ్రాములు పట్టే అచ్చులు చేయించు. లేకపోతే, పోలీసులకి రిపోర్టు ఇవ్వడానికి నేను వెనుకాడను."

"రేపటినుంచి తప్పకుండా తమరు సెలవు ఇచ్చినట్లే చేస్తాను సార్!" అన్నాడు బేకరీవాడు బహు వినయంగా.

ప్రొఫెసరు మారుమాటాడకుండా చేతికర్ర ఊపుకుంటూ వెళ్ళిపోయాడు.

మరో మూడు నెలలు గడిచాక ప్రొఫెసర్ కార్ల్ ఆ బేకరీ యజమానితో మళ్ళీ ఇలా అన్నాడు: "నువ్వు తప్పుడు అచ్చులు మార్చలేదు. యథాప్రకారంగా ప్రజలని మోసగిస్తున్నావు. ఈ సంగతి ఇప్పుడే పోలీసులకి రిపోర్టు ఇచ్చి వస్తున్నాను."

బేకరీ యజమాని కాస్త కంగారు పడ్డాడు. "ఆ తరువాత నుంచీ మళ్ళీ మీకిచ్చిన బ్రెడ్డు ఎప్పుడైనా 200 గ్రాములకి తగ్గిందా బాబూ?"

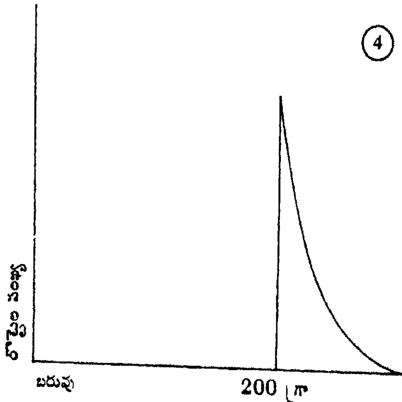
"లేదు. 200 గ్రాములకి పైనే ఉంటూ వచ్చింది ఎప్పుడూనూ."

"మరి ఇంకేం బాబూ, ఇందులో మోసం ఏముందీ?"

"అవును, మోసమే. 200 గ్రాములకన్న తక్కువ రొట్టె నాకెన్నడూ రాకపోవడానికి కారణం నువ్వు పెద్ద అచ్చును వాడడం కానే కాదు. నాకోసమని ప్రత్యేకంగా బరువుగా ఉన్న బ్రెడ్డుని ఏరి ఉంచి, నాకిస్తున్నావు. మిగిలిన అందరికీ ఇదివరలోలాగే చిన్న రొట్టె లిస్తున్నావు."

"పోనీ, నేను ఇతరులకిస్తున్న రొట్టెలు తక్కువ బరువు ఉన్నాయేమో తమరు తూచి చూశారా బాబూ?"

"లేదు. ఇతరులకిచ్చే రొట్టెలని తూచి చూడవలసిన అవసరం కూడా లేదు."




"ఇతరులు తీసుకెడుతున్న రొట్టెలు తూచి చూడలేదంటున్నారు. మీకు ఇస్తున్న 200 గ్రాములకన్న తక్కువ ఎన్నడూ లేదు అంటున్నారు. మరి

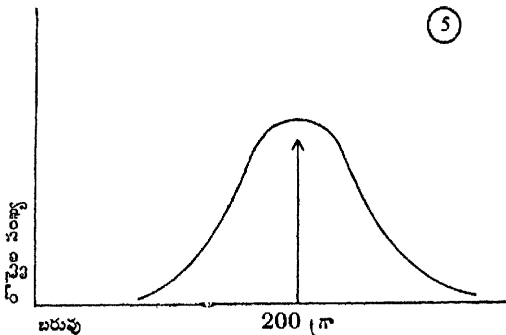
నేను ఇతరులని మోసంచేస్తున్నానని ఎల్లా చెప్పగలరు బాబూ?" అన్నాడు బేకరీ యజమాని తన మోసం అంతా సులభంగా బయటపడదులే అన్న ధీమాతో.

ఇంతకీ ప్రొఫెసరుకి బేకరీవాడి మోసం ఎల్లా తెలిసింది? ఇతరులను అడిగి వాకబుచేశాడా? లేక పట్టినే బెదిరిస్తే బేకరీవాడు భయపడి నిజం చెప్పేస్తాడని అల్లా అన్నాడా? లేక ఆ బేకరీలో పనిచేసే నౌకర్‌కి లంచం యిచ్చి కూపీ తీశాడా? ఈ ప్రశ్నలకి తెలిసి కూడా సమాధానం చెప్పకపోయారో మిమ్మల్ని ఏమనాలో నాకు తెలియదు.

జవాబు :

పైన చెప్పిన కారణాలేవీ సరియైనవి కావు. మళ్ళీ వెనుకటిలాగే తన రొట్టెలను జాగ్రత్తగా తూచి, రొట్టెల సంఖ్యకి బరువులకి గ్రాఫ్ గీశాడు ప్రొఫెసర్. గీస్తే 16 వ పేజీలోని 4 వ బొమ్మలో చూపిన విధంగా వచ్చింది.

ఆ బేకరీవాడు సరిగ్గా 200 గ్రాముల పిండిపట్టే అచ్చులనే నిజంగా ఉపయోగిస్తున్నట్లయితే ఒక్కొక్కప్పుడు 200 కన్నా అధికంగానూ, ఒక్కొక్కప్పుడు కాస్త తక్కువగానూ ఉండి, గ్రాపుగీస్తే ఇక్కడి 5 వ బొమ్మలో చూపినట్లు ఉంటుంది.




200 గ్రాముల రేఖకు ఇరువైపులా సమసౌష్ఠవమైన గ్రాపు రావాలి. ఈ విధంగా ఉండి తీరాలని కార్ల్‌ఫ్రీడ్రిక్ గాస్ అనే విఖ్యాత జర్మన్ శాస్త్రజ్ఞుడు రుజువుచేశాడు. ఒక్క రొట్టెకే కాదు — ఏ వస్తువులు తీసుకున్నా "దోష వితరణం" (Error Distribution) ఈ విధంగానే ఉంటుంది. కానీ బేకరీ

వాడి రొట్టెల విషయంలో మాత్రం గ్రాఫు 200 గ్రాముల రేఖకు ఇరుపక్కలా సౌష్ఠవంగా ఉండక కత్తిరించేసినట్లు ఎడమవైపున బొత్తిగా శూన్యంగా ఉంది. కుడివైపున బహు వేగంగా తగ్గిపోయే రేఖ వచ్చింది. ఇటువంటి అసహజమైన వితరణం కనిపించడానికి కారణం 200 గ్రాముల బరువును మించిన రొట్టెలను కావాలని ప్రత్యేకంగా వీరి ప్రొఫెసరుగారికి యిస్తూ ఉండడంవల్లనే జరిగిందని సులభంగా తెలిసిపోతుంది.

ఈ గ్రాఫులూ, వితరణాలూ వగైరా గందరగోళాన్ని అర్థంచేసుకునే శక్తి, ఓపికా పోలీసు డిపార్టుమెంటువారికి ఉండి, ఆ బేకరీ యజమానిని శిక్షించారో, లేక సాక్ష్యం సరిపోదని వదలేశారో తెలియదు.

*　　　*　　　*

## 10. బొమ్మ – బొరుసు

ధంకా పలాసులో చిత్తుగా ఓడిపోయిన ఒక లెక్కల ప్రొఫెసరు రాత్రి అంతా దీర్ఘంగా ఆలోచించాడు. పోయిన డబ్బు తిరిగి రాబట్టడం ఎల్లాగా అని. ఒక ఊహ తోచింది. కళ్లు మిలమిలా మెరిశాయి. అర్ధరాత్రి లైటువేసి, కాగితం కలం తీసుకుని, ఏవేవో లెక్కలు వేశాడు ఇదే మంచిపద్ధతని తోచింది. ఈ పద్ధతి ఇదివరకే ఎందుకు తట్టలేదా అనుకున్నాడు. అంతే. లైటు ఆర్పేసి, తృప్తిగా నిద్రపోయాడు.

మరునాడు సాయంకాలం యూనివర్సిటీ నుంచి సరాసరి క్లబ్బుకి వెళ్లేడు ప్రొఫెసర్.

"రండి ప్రొఫెసరుగారూ!" అని సాదరంగా ఆహ్వానించాడు జోగయ్య.

"నాకు మూడు ముక్కల ఆట అంత బాగా రాదని ఒప్పుకుంటాను. ఈ వేళ మరో కొత్త ఆట ఆడదాం" అన్నాడు ప్రొఫెసర్.

జోగయ్య జూదంలో 40 ఏళ్ళ సర్వీసు ఉన్నవాడు. అతనికి జూదం ఏదైనా కరతలామలకమే. ఎంత కొత్తరకం ఆట అయినా సరే, ఒక్కసారి ఆడిచేచాలు- దానిగుట్టు మట్లు అన్నీ పట్టివేయగలనన్న ధీమా గలవాడు.

"సరే, మీ యిష్టం. చెప్పండి ఆ ఆట ఏమిటో" అన్నాడు జోగయ్య.

ప్రొఫెసరు వివరించాడు.

"ఇది పైసలతో ఆడే ఆట. ఇద్దరమూ చెరొక వందపైసలూ తీసుకోవాలి. వాటిని ఎవరికి తోచినట్లు వాళ్లు (బొమ్మ-బొరుసుల క్రమం ఎవరికి తోచినట్లు వారు) ఇతరులకు తెలియకుండా అమర్చుకోవచ్చు. అమర్చుకోవడం

అయాక ఆ పైసల దొంతర్లను ఎదురెదురుగా పట్టుకుని ఒకదానితో ఒకటి పోల్చుకోవాలి.

"నీ దొంతరలో పైన బొమ్మఉండి, నా దొంతరలోనూ పైన బొమ్మే ఉంటే నువ్వు నెగ్గినట్టు, అప్పుడు నేను నీకు 9 రూపాయలిస్తాను.

"మన ఇద్దరి దొంతరలలోనూ పైన బొరుసులు ఉన్నా నువ్వు నెగ్గినట్లే. కాని అప్పుడు నేను నీకు ఒక్కరూపాయి ఇస్తాను.

"మన దొంతరలో పైన ఒకరికి బొమ్మ,మరి ఒకరికి బొరుసు ఉంటే నేను నెగ్గినట్లు అప్పుడు నువ్వు నాకు 5 రూ॥లు ఇవ్వాలి.

"ఒప్పదలేనా?"

జోగయ్య ఆలోచించాడు.

బొమ్మ — బొమ్మ → 9 రూ॥ (జోగయ్యకి)

బొరుసు — బొరుసు → 1 రూ॥ (జోగయ్యకి)

బొమ్మ — బొరుసు → 5 రూ॥ (ప్రొఫెసరుకి)

బొరుసు — బొమ్మ → 5 రూ॥ (ప్రొఫెసరుకి)

ఈ నాలుగు విధాలుగా మాత్రమే ఈ రెండు దొంతరలలోని పైసలూ అమరి ఉంటాయి. ఇందులో మొదటిది రెండు రకాలుగాను అయితే తాను నెగ్గు తాడు. చివరి రెండు అయితే ప్రొఫెసరు నెగ్గుతాడు. ఈ నాలుగు సమానమైన అవకాశాలు కలవేకదా? అందులో తాను నెగ్గే రెండు రకాలూ కలిపి $9+1=$ 10 రూ.లు ప్రొఫెసరు నెగ్గే రెండు రకాలూ కలిపి $5 + 5 = 10$ రూ.

కనుక ఇద్దరికి ఇంచుమించు సమానంగానే డబ్బు రావచ్చు. ఇందులో తాను నష్టపోయేదిగానీ, లాభం కొట్టేదిగానీ అధికంగా ఉండదు. నిన్ననే ఢంకా పలాసులో ప్రొఫెసరు బాగా నష్టపోయి ఉన్నాడు పాపం. ఈసారి అయినా ఈ అమాయకుడు కోరిన ఆట ఆడితే పోయేది ఏమీ లేదులే.

ఇల్లా ఆలోచించి ఈ ఆట ఆడడానికి ఒప్పుకున్నాడు జోగయ్య.

ఇద్దరూ చెరో వంద పైసలూ తీసుకుని, వాటిని ఎవరికి తోచినట్లుగా వారు దొంతరగా పేర్చుకున్నారు. ఆట మొదలు పెట్టారు.

ఆట నడుస్తున్న కొద్దీ జోగయ్యకి ఆశ్చర్యం అంతకంతకు ఎక్కువ కాసాగింది. తాను అప్పుడప్పుడు ఏవో కొన్ని ఆటలు నెగ్గినా మొత్తం మీద ఆ రోజున ప్రొఫెసర్ చాలా ఆటలు నెగ్గేడు. ఆయనకి 70 రూ. లాభం వచ్చింది!

"ఈ రోజున మీరు నక్కని తొక్కివచ్చారు" అన్నాడు జోగయ్య.

ప్రొఫెసర్ నవ్వి ఊరుకున్నాడు. కాని, అతడికి తెలుసు తాను నెగ్గడానికి అసలు కారణం నక్కా-కాదు, తొక్క-డమూ కాదనీ, "సంభావ్యత" (Probabilities) అనే గణిత సూత్రాల ప్రకారం జరగవలసినట్లే జరిగింది అనీనూ.

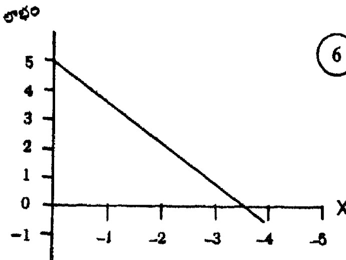
ఏ విధంగా పైసలదొంతరను అమర్చినందువల్ల ప్రొఫెసరుకి ఇంత లాభం వచ్చిందో మీకు ఏమైనా తెలిసిందా?

జ వా బు :

ఈ ఆట చాలా లోతైనది. జోగయ్య అనుకున్నంత అమాయకమైనది ఏమీకాదు.జోగయ్య తన పైసలను ఏ విధంగా అమర్చుకున్నా సరే, అతడు ఓడి తీరతాడు. అతడు తెలివిగా అమర్చుకుంటే తక్కు-వ నష్టపోతాడు, లేకపోతే అధికంగా నష్టపోతాడు. అంతేకాని, ప్రొఫెసరుని ఏ విధంగానూ ఓడించలేడు. ఇది ఎల్లా సాధ్యమో వివరిస్తాను.

బొమ్మలనూ, బొరుసులనూ ఏ నిష్పత్తిలో ప్రొఫెసరు అమర్చుకున్నాడో తెలుసుకుందాం.

మొత్తం పైసలలో x వ వంతు బొమ్మలు, (1x—)వ వంతు బొరుసులూ ఉండేటట్లు ప్రొఫెసరు అమర్చుకున్నాడనుకుందాం. ఈ విధంగా అమర్చుకోవడం వల్ల అతడికి ఎంత లాభం గలదో చూద్దాం.



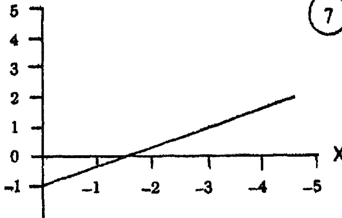

మాట వరసకి జోగయ్య అన్నీ బొమ్మలే పేర్చుకున్నాడనుకుందాం. అప్పుడు ప్రొఫెసర్‌గారి దొంతర పైన బొమ్మ వచ్చినప్పుడల్లా జోగయ్యకి తొమ్మిదేసిరూపాయలు ఇచ్చుకోవాలి. మొత్తం పైసలలో ప్రొఫెసరు x వ వంతులు బొమ్మలు ఉంచుకున్నాడు కనుక ఆయనకి నష్టం 9 x రూపాయలు. (1—x)వ వంతు బొరుసులు ఉన్నాయి కనుక ప్రొఫెసరుకి 5 (—x) రూ. లాభం కనుక ప్రొఫెసర్‌కి మొత్తం లాభం.

$= -9x + 5(1-x)$

$= -14x + 5$

దీనిని గ్రాఫుగీస్తే 6వ బొమ్మలో చూపినట్లు వస్తుంది. దీనిని ఇల్లా ఉంచుదాం.

ఇంక జోగయ్య అన్నీ బొరుసులే అమర్చుకుంటే ఏమవుతుందో చూద్దాం.




7

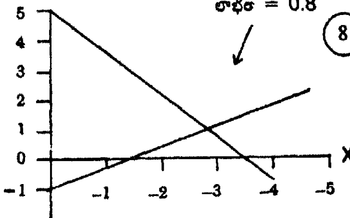
$(1-x)$ భాగం బొరుసులు కనుక, ప్రొఫెసరుకి $1-x$ రూపాయలు నష్టం.

x భాగం బొమ్మలు కనుక ఆయనది $5x$ రూపాయలు లాభం.

ఈసారి ప్రొఫెసరుకి వచ్చే నికరలాభం.

$= 5x-(1-x)$

$= 6x1-1$




8

దీనికి గ్రాఫుగీస్తే 7 వ బొమ్మలో చూపినట్లు వస్తుంది.

ఈ రెండు గ్రాఫులనూ ఒకే కాగితం మీద గీస్తే 8 వ బొమ్మలో చూపినట్లు వస్తుంది.

దీనినిబట్టి ఏం తెలుస్తోంది అంటే—మొత్తం పైసలలో $\frac{3}{10}$ వ వంతు బొమ్మలు, మిగిలినవి బొరుసులు ఉండేటట్లు దొంతర పేర్చుకుంటే (బొమ్మలూ బొరుసులూ ఏ క్రమంలో ఉన్నాసరే) ప్రొఫెసరుకి ఒక్కొక్క పైసను పోల్చి చూచినప్పుడల్లా సరాసరి మీద 0.8 రూపాయి (అంటే 80 పైసలు) లాభం వస్తూ ఉంటుంది.

ఇందులో ముఖ్యమైన విషయం ఏమిటంటే - చాలా చాలా పైసలతో ఆడి నప్పుడే ఈ లెక్క నిజం అవుతుంది. వంద బదులు వెయ్యి పైసలతో ఆడితే మరింత లాభం.

* * *

# 11. కుటుంబ నియంత్రణం

అరేబియాలో ఒక చిన్న తురుష్కరాజ్యాన్ని ఇబాన్-అల్-ఖుస్ అనే సుల్తాను పాలిస్తున్నాడు. అతడు బహు సూక్ష్మగ్రాహి అని వాడవాడలా ప్రసిద్ధి కెక్కాడు అతని బుద్ధినైశిత్యాన్ని తెలుపడానికి ఈ కథను చెబుతూ ఉంటారు.

ఆ సుల్తాన్ దగ్గర అనీస్-ఉర్-రహమాన్ అనే వజీరు ఒకడు ఉన్నాడు. అతడు ఒకనాడు సుల్తాను దగ్గరకువచ్చి, అతి ముఖ్యమైన విషయం ఒకటి చర్చించడానికి వచ్చానన్నాడు. అతడు చెప్పదలచిన రాచకార్యం బహు చిత్ర మైనది.

"మన సమాజంలో ఒక్కొక్కడు ఎంత మంది అందగత్తెలను పెళ్ళాడ గలిగితే అంత గొప్ప అన్న విషయం అందరూ అంగీకరించినదే కదా? కానీ మన దేశంలో ఆడ పిల్లల సంఖ్య, మగ పిల్లల సంఖ్య ఇంచు మించు సమంగానే ఉన్న కారణంచేత అందరికీ అనేకమంది భార్యలు దొరకడం అసాధ్యమైపోతోంది. ఎంత ఉన్నత కుటుంబంలోనివాడికైనాసరే. ధనవంతుడు కాకపోతే ఒకే ఒక్క పెళ్ళాంతో సరిపెట్టుకోవలిసిన దుస్థితి ఏర్పడింది. దేశంలో మగవాళ్ళ కన్న ఆడవాళ్ళ జనాభా చాలా ఎక్కువగా ఉంటే తప్ప ఈ కామినీ కాటకం తొలగేటట్లు లేదు. దేశంలో ఆడవాళ్ళు ఎక్కువగా పుట్టేటట్లు చట్టంచేస్తే బాగుంటుదని నా మనవి. దేశంలో పలువురు పెద్దలున్నూ ఇదేవిధంగా భావిస్తున్నారు" అని విన్నవించాడు.

వజీరు చెప్పినదంతా సుల్తాను బహుజాగ్రత్తగా విన్నాడు. నిజానికి ఒక మగవాడికి ఒక్క భార్య ఉండడమే మంచిదని సుల్తానుగారి స్వంత అభిప్రాయం. అయినప్పటికీ వజీరునూ, దేశంలోని పెద్ద తలకాయలనూ అసంతృప్తి పరచడం ఆయనకి ఇష్టం లేకపోయింది. వజీరు కోరికను అంగీకరిస్తున్నట్లు ఉండాలి. కాని నిజానికి అంగీకరించకూడదు.

ఏమిటి సాధనం అని సుల్తాను ఆలోచనలో పడ్డాడు. ఆఖరికి మెరుపులా చక్కని ఉపాయం తట్టింది. ముఖంమీద చిరునవ్వు విరిసింది. వజీరును ఉద్దేశించి తన అభిప్రాయం చెప్పేడు.

"మీరు చెప్పినది సబబుగానే ఉంది. దీనికి ఏదో విరుగుడు చేయవలసిందే. నాకొక మార్గం కనిపిస్తోంది. మనదేశంలోని ఆడవాళ్ళందరికి ఆడపిల్లను కంటేనే మరోసారి మళ్ళీకనడానికి అవకాశం ఇవ్వాలి. మగపిల్లవాడిని కన్న తల్లికి మళ్ళీ మరొకసారి కనే అవకాశం ఇవ్వకూడదు. ఈ విధంగా చట్టం చేశామంటే మన దేశంలో ఆడపిల్లలు పుట్టలుపుట్టలుగా పుట్టుకువస్తారు. ఒక్కొక్క కుటుంబంలో ఐదుగురు ఆడపిల్లలు, ఒక్క మగపిల్లవాడు; కొందరికి పది పన్నెండు మంది ఆడపిల్లలు, ఒక్క మగపిల్లాడు; కొందరు దురదృష్టవంతులకు ఒకే ఒక్క మగపిల్లాడు - ఇల్లా ఉంటుంది పరిస్థితి. ఈ విధంగా మొత్తం మీద ప్రతి కుటుంబంలోనూ ఆడపిల్లల సంఖ్య మగపిల్లలకన్న అధికాధికంగా ఉంటుంది. మీరు కోరిన ఫలితమున్నూ సిద్ధిస్తుంది."

వజీరు సంభ్రమాశ్చర్యాలతో సుల్తానువారి పథకం విన్నాడు. చాలా చాలా సంతోషించి, సలాములు చేస్తూ - ఈ వార్త ఎంత త్వరగా నలుగురికి తెలియజేద్దామా అన్న ఆత్రాన్ని బలవంతంగా నొక్కి పెట్టుకుంటూ - బయటికి వెళ్ళిపోయాడు. ఇన్నాళ్ళకి సుల్తానువారిని ఈ పనికి ఒప్పించగలిగేనని, ఇహ ఇటుమీదట దేశంలో ఆడపిల్లల కొరతే ఉండదనీ సంబరపడిపోయాడు.

ఈ సంభాషణ అంతా చాటునుంచి వింటున్న యువరాజు తడబడుతూ కంగారుగా తండ్రి ఎదరకు వచ్చి సలాము చేశాడు.

"హుజూర్! మీరే ఈ వజీరు కుచ్చితానికి తలవంచేసి ఇటువంటి చట్టం ప్రవేశపెడితే ఇహ దేశంలో అభ్యుదయం ఎక్కడ ఉంటుంది చెప్పండి?"

సుల్తాను మందహాసం చేశాడు. కొడుకును వాత్సల్యంగా దగ్గరకు పిలిచాడు.

"ఆ వజీరు మూర్ఖపు కోరికను అంగీకరించానని ఎల్లా అనుకున్నావు?"

"హుజూర్! మరి మీ చట్టం ప్రకారం...."

హో హ్హో హ్హో హ్హో అని బొజ్జ ఎగరేసుకుంటూ సుల్తాను నవ్వి ఇల్లా అన్నాడు:

"అయితే, అందులో ఉన్న ధర్మసూక్ష్మాన్ని నువ్వు గ్రహించలేదన్న మాట! నేను చెప్పిన చట్టం ప్రకారం మన దేశంలో ఆడ - మగ నిష్పత్తి ఇప్పుడున్నట్లే ఉంటుంది. అంతేకాని, మగవారికన్న ఆడవారి సంఖ్య ఎక్కువై పోయే భయం ఎంతమాత్రమూలేదు."

"అదెల్లాగ హుజూర్? ఆడపిల్లల నెందరినైనా కనడానికి అవకాశం ఇస్తూ ఒక్క మగపిల్లవాడిని కనగానే ఆ తల్లికి ఇహ కనే అవకాశం ఇవ్వ కూడదనికదా మీరు చేయబోయే చట్టం నిర్దేశిస్తున్నది?"

సుల్తాను మందహాసం చేశాడు.

"అదెల్లాగో చెప్తా విను. మాటవరసకి మన దేశంలోని తల్లులంతా కూడ బలుక్కున్నట్లు ఒక్కరోజునే ప్రసవించారనుకో. ఆ పుట్టే పిల్లలలో సగం మంది మగపిల్లలు, సగం మంది ఆడపిల్లలూ ఉంటారని ఒప్పుకుంటావా? అంటే అర్థం ఏమిటి? దేశంలో ఆడవారెందరో, మగవారూ అందరే ఉంటారు అనే కదా? - సరే, ఇందులో మగబిడ్డలను కన్న సగం మంది తల్లులూ చట్టం ప్రకారం ఇహ కనకూడదు. మిగిలిన సగం మంది తల్లులకూ మళ్ళీ రెండోసారి కనే అవకాశం ఉంటుంది. ఈసారి మళ్ళీ సగం మందికి మగపిల్లలు, సగం మందికి ఆడపిల్లలూ పుడతారు. అంటే, మళ్ళీ ఇప్పుడు కూడా దేశం మొత్తం మీద ఆడ - మగ నిష్పత్తి మారదు. ఈసారి మగబిడ్డలను కన్నతల్లులు ఎవ్వరూ ఇకమీదట కనకూడదు. మిగిలిన తల్లులు మూడవసారి ప్రసవించినప్పుడు కూడా మళ్ళీ ఇదే ప్రకారంగా ఆడ - మగ నిష్పత్తి సమానంగానే ఉంటుంది....

కనుక, ఈ చట్టం వజీరు లాంటి మూర్ఖులకు కన్నీళ్ళు తుడవడానికే గాని, మరెందుకూ కాదు."

యువరాజు ముఖం వికసించింది.

(షరా : ఈ కథలో ఆడ, మగపిల్లలు పుట్టుకలు సమానంగానూ, స్వతంత్ర సంభావ్యత కలిగినూ (Equal and Independent Probabilities) ఊహించుకున్నాం. కాని, ప్రకృతిలో ఇది ఖచ్చితంగా నిజమే అనడానికి లేదు.)

*   *   *

# 12. ఉరితీసే రోజు

ఒక చపాతీ ఎత్తుకుపోయినందుకుగాను అబ్దుల్ ఖాసిం అనేవాడికి ఉరిశిక్ష విధించాడు ఇబాన్ అల్ - ఖుస్ సుల్తానువారి వజీరు అనీస్ - ఉర్ - రహమాన్.

అబ్దుల్ ఖాసిం అంటే వజీరుకి పడదు. అతడిని ఎల్లాగైనా పట్టి ఉరి తీయించాలని అవకాశం కోసం ఎదురుచూస్తున్న వజీర్‌కి అల్పమైన ఈ నేరం కళ్ళబడింది. వెంటనే అనుమానించకుండా ఉరిశిక్ష వేసేశాడు. చడీచప్పుడూ కాకుండా ఉరి తీయించెయ్యాలని ఉవ్విళ్ళూరేడు. కాని, ఆ దేశపు చట్టం

ప్రకారం ఉరితీయబడే వ్యక్తి సుల్తానుగారికి అర్జీ పెట్టుకోవచ్చు. ఈ అర్జీ ఉరి తీయబడే రోజున మాత్రమే పెట్టుకోవాలి.

ఇంత చిన్న నేరానికి ఉరిశిక్ష వేయడానికి సుల్తాను అంగీకరించడని తెలిసీ ఉండిన వజీరు అసలు అర్జీ పెట్టుకునే అవకాశమే ఖాసింకి లేకుండా చెయ్యాలని జిత్తులమారి పథకం వేశాడు.

ఖాసిం సమక్షంలో కారాగృహాధికారి అయిన అయూబ్ ఖాన్‌కి నింది తుణ్ణి ఉరి తీయవలసిందిగా చెప్పేడు వజీరు. ఫలానా ఆదివారంనుంచి శని వారం లోపుగా ఈ వారంరోజులలోనూ ఏదో ఒక రోజున సాయంకాలం ఉరితీత జరగాలని కూడా తెలియజేశాడు. కాని, ఈ వారం రోజులలోనూ సరిగ్గా ఏ రోజున ఉరి అమలు జరపాలో నిర్ణయించలేదు. ఆ వివరం అయూబ్ ఖాన్‌కి వదిలేశాడు. పైగా, ఏ రోజున శిక్ష అమలు పరిచేదీ ముందుగా నిందితుడికి తెలియనివ్వవద్దని కూడా అన్నాడు.

"అబ్దుల్ ఖాసింకి ప్రతిరోజూ ఉదయం నీవే స్వయంగా భోజనం తీసుకు వచ్చి ఇస్తూ ఉండు. ఏ రోజున శిక్ష అమలు పరచేదీ ఖాసింకి ఎంతమాత్రం తెలియనివ్వకుండా రహస్యంగా ఉంచి, ఉరితీతకు ప్రయత్నాలు మాత్రం చేసుకుపో. నీవు ఉరితీయవలసిన రోజు ఉదయం యధాప్రకారంగా నువ్వు భోజనం తీసుకు వెళ్ళినప్పుడు 'అయ్యా! అయూబ్ ఖాన్‌గారూ! ఇదిగో ఈ రోజున నన్ను ఉరితీయడానికి మీరు నిశ్చయించుకున్నారు" అని ఖాసిం నీతో చెప్పి, ఆ సంగతి ఎలా తెలిసికోగలిగాడో సరియైన కారణం వివరించగలిగితే అప్పుడు సుల్తానుగారికి అర్జీ పెట్టుకునే అవకాశం ఖాసింకి ఇద్దాం. అల్లా సకారణంగా చెప్ప లేని పక్షంలో అతడికి అర్జీ పెట్టుకునే హక్కు ఉండదు. నువ్వు నిస్సందేహంగా ఉరితీసెయ్యవచ్చు'' అని చెప్పి వజీరు పెద్ద పెద్ద అంగలు వేసుకుంటూ వెళ్ళిపోయాడు. ఏ రోజున శిక్ష అమలుపరిస్తే ఖాసిం ఊహకి అందకుండా ఉంటుందా అని ఆలోచిస్తూ అయూబ్ ఖాన్ తన మందిరానికి వెళ్ళిపోయాడు. తనని ఊరితీసేరోజు ఏదో తెలుసుకోవడం ఎల్లాగా అని ఖాసిం ఆలోచనలో మునిగిపోయాడు.

అయూబ్ ఖాన్‌కి ఈ పని మరీ క్లిష్టమైపోయింది. ఏమంటే, ఉరితీయడానికి కావలసిన ఏర్పాట్లన్నీ సిద్ధం చేసుకోవాలంటే కొద్దిరోజులు ముందుగానే నిశ్చ యించుకుని పని మొదలుపెట్టాలి. ఈ సంగతి ఖాసిం ఊహకి అందనివ్వ కూడదు కదా?

అబ్దుల్ ఖాసిం అనేవాడిని అన్యాయంగా చంపివేయడానికి ప్రయత్నాలు జరిగిపోతున్నాయనీ, ఆఖరిక్షణాలలో సుల్తానువానికి అర్జీ పెట్టుకునే అవకాశం కూడా వాడికి లేకుండా చేయాలనేది వజీరు పన్నాగమనీ యువరాజు చెవిన పడింది ఎల్లాగో. అతడు హుటాహుటిగా తండ్రికి ఈ వార్తను అందజేశాడు. వెంటనే సుల్తాను అయూబ్‌ఖాన్‌ని తన ఎదుటికి రప్పించుకున్నాడు.

"అబ్దుల్ ఖాసిం అనేవాడిని స్వల్ప నేరానికి ఉరితీయబోతున్నావనీ, ఏ రోజున ఉరితీసేదీ అతడికి చెప్పకుండా, ఆరోజున మాకు అర్జీ పెట్టుకునే అవకాశం లేకుండా చేయాలని ప్రయత్నాలు జరిగాయని మాకు తెలిసింది. ఇది నిజమేనా?'' అని అడిగాడు సుల్తాను.

అయూబ్‌ఖాన్ గజగజా వణికిపోయాడు.

"నిజమే హుజూర్! కాని, ప్రభువులు చిత్తగించాలి. ఇందులో నా ప్రమేయం ఏమీలేదు. వజీర్-ఎ-ఆలమ్ నన్ను ఇల్లా ఆజ్ఞాపించారు. నిజానికి ఖాసిం అంటే నాకు ప్రత్యేకించి పగ ఏమీలేదు. హుజూర్ చిత్తగించాలి''.

"సరే సరే, నీ ప్రమేయం ఏమీలేదని మేమూ విన్నాం.''

అయూబ్‌ఖాన్ ముమ్మారు సలాం చేశాడు.

"ఆ. అన్నట్లు నువ్వు చాలా తెలివైన వాడివని విన్నాం" అన్నాడు సుల్తాన్.

అయూబ్ సిగ్గు అభినయించాడు, చేతులు నలుపుకుంటూ.

"ఎంతమాట! ఆలంపనాముందు నా తెలివితేటలు ఏపాటి? ఏదో పెద్దలు వ్రాసిన గ్రంథాలు చదువుతూ వుంటాను. తర్కం నా అభిమాన విషయం.''

"ఓహో! అలాగా? సరే, ఇంతకీ ఖాసింని ఉరితీయవలసిన రోజు ఏదో నిశ్చయించుకున్నావా?''

"ఇంకా లేదు హుజూర్!''

''అర్థం అయింది. వచ్చే ఆదివారం మొదలుకొని శనివారం వరకూ గల ఏడు రోజులలోనూ ఏదో ఒకరోజు అని నువ్వు నిశ్చయించుకోవాలి. అంతేకదూ?''

అంతే అన్నట్లు అయూబ్ తల ఊపేడు.

''ప్రభువులు చిత్తగించాలి. వజీరువారి గులామును. వారు ఆదేశించినట్లు నడుచుకోవలసినవాడిని.''

''అది సరేలేవయ్యా, కాదనడంలేదు. నీ ధర్మం నువ్వు నిర్వర్తించవలసిందే. అందుకు సందేహం ఏమీలేదు. కానీ, ఉరితీయడానికి తగిన రోజు

ఏదో ఆలోచిద్దాం ఇద్దరమూ కలిసి. ఆ వారంలో ఆఖరు రోజు అయిన శని వారంనాడు సాయంకాలం ఉరితీయడం సాధ్యం అవుతుందేమో ఆలోచించు."

అయూబ్ ఖాన్ కనుబొమ్మలు ముడివేసి, తీవ్రంగా ఆలోచించాడు.

'వీలుకాదు హుజూర్!"

"ఏమీ? ఎందుకనీ?"

"అబ్దుల్ ఖాసిం అవలిస్తే పేగులు లెక్కపెట్టగల బుద్ధిశాలి. ఉరితీతకు సంబంధించిన మతలబులన్నీ క్షుణ్ణంగా తెలిసినవాడు. శనివారం ఉదయం నేను భోజనం తీసుకువెళ్ళేవరకూ బ్రతికి ఉన్నాడంటే - 'ఈ రోజునే నన్ను ఉరితీయబోతున్నారు. ఏమంటే, ఇదే అఖరి రోజు. ఈరోజు దాటితే ఇక నన్ను ఉరితీయడానికి వీలులేదు కనుక' అని ఆలోచించి, సత్యం కనుక్కోగలడు, కనుక శనివారం నాడు ఉరితీయడం సాధ్యంకాదు హుజూర్!" అన్నాడు అయూబ్ ఖాన్.

సుల్తాను మందహాసం చేశాడు.

"అంటే నువ్వూ, ఆ అబ్దుల్ ఖాసిమూ కూడా శనివారం ఉరితీతకు వీలుకాదు అని గ్రహించగలరన్నమాట?"

"చిత్తం. ఒక్క శనివారంనాడు తప్ప ఆదివారం నుంచి శుక్రవారం వరకూ గల ఆరు రోజులలోనూ ఎప్పుడో ఒకరోజు అని నేను నిశ్చయించుకో వలసి ఉంటుంది హుజూర్!"

"అంటే నువ్వూ, ఆ ఖాసిమూ కూడా మీ మీ కేలండర్లలో శనివారాన్ని కొట్టిపారవెయ్య వచ్చునన్నమాట? ఇకపోతే ఆదివారం నుంచి శుక్రవారం వరకూ గల ఆరు రోజులు మిగిలాయి అంటే ఉరి తీయడానికి తగిన రోజులలో శుక్రవారం ఆఖరిది అన్నమాట. అంతేనా?"

"అంతే హుజూర్!"

"ఓహో. అయితే ఆఖరిరోజు అయిన శుక్రవారం వరకూ ఆగి,శుక్రవారం సాయంకాలం ఉరి తీయగలవేమో ఆలోచించు."

అయూబ్ ఖాన్ మళ్ళీకనుబొమ్మలు ముడివేసి, జాగ్రత్తగా ఆలోచించాడు.

"వీలుకాదు ప్రభూ! ఏమంటే నాకూ ఖాసిముకూ కూడా ఉరి తీయదగ్గ రోజులలో శుక్రవారమే ఆఖరి రోజు అని తెలుసు కనుక, శుక్రవారం ఉదయం నేను భోజనం తీసుకురాగానే 'ఓహో ఇదే ఆఖరిరోజు. ఈ రోజున ఉరితీయక పోతే ఇహ ఉరి తీయడం సాధ్యమేకాదు' అని మనస్సులో ఆలోచించుకుని, 'అయూబ్ ఖాన్‌గారు! ఈరోజే నన్ను ఉరితీయబోతున్నారు' అని ఖాసిం సకారణంగా చెప్పగలుగుతాడు."

"అవును. నీ తర్కం అర్థమైంది. కనుక, శుక్రవారాన్ని కూడా మీ మీ కేలండర్లలో నుంచి మీరిద్దరూ కొట్టెయ్యవచ్చు. ఇహపోతే, ఆదివారం నుంచి గురువారం వరకూ మాత్రమే ఉరితీయడానికి వీలు. అంతేకదూ?"

"జీ, హుజూర్!"

"అల్లా అయితే ఉరితీయదగ్గ రోజులలో గురువారం ఆఖరిరోజు అవుతుంది. పైతర్కం వల్ల మళ్ళీ గురువారం కూడా వర్జమే. కనుక దానిని కూడా కొట్టెయ్యవచ్చు. అవునా?"

"అవునవును. ఇంక ఉరితీయదగ్గ రోజులలో బుధవారం ఆఖరుది అవుతుంది. కాని, మళ్ళీ వెనుకటి తర్కం చేతనే బుధవారం కూడా నిషిద్ధం అయిపోతుంది. ఈ విధంగా మొత్తం వారం అంతా ఉరితీయడానికి వీలులేని రోజులే అయిపోతాయి. హుజూర్!" అన్నాడు అయూబ్ ఖాన్.

సుల్తాను మందహాసం చేశాడు.

"ఆఖరిరోజు ఉరితీతకు వీలుకానిది అని ముందుగా తర్కం ద్వారా సాధించి, అక్కడినుంచి వారంలో ఏ ఒక్కరోజూ ఉరితీయడానికి పనికిరాదని బుజావు చేశాం. అన్నట్లు ఇందులో మరో ధర్మంసూక్ష్మం ఉంది. నువ్వూ, ఆ అబ్దుల్ ఖాసిమూ కూడా సమానమైన యుక్తి శాలురే కనుక, ఒకరి ఆలోచనా ధోరణిని మరొకరు ఆధారంగా చేసుకుని, నిచ్చెన మెట్లు ఎక్కినట్లు పైనిర్ణయానికి రాగలిగేరు గానీ, మీ ఇద్దరిలో ఏ ఒక్కడు కాస్త మందబుద్ధి అయినా ఈ తర్కధార మధ్యలో ఎక్కడో తెగిపోయి ఉండును. ఖాసిముకి ఉరిశిక్ష తప్పకనూ పోను....సరే. వెళ్ళిరా...."

*　　　*　　　*

## 13. శిక్ష మీద శిక్ష

క్రిందటికథలో అబ్దుల్ ఖాసిం ఉరిశిక్షను వెంట్రుక వాసిలో తప్పించుకున్న ఉదంతం విన్నాం. అతడు దురదృష్టవశాత్తూ రెండోసారి పట్టుబడ్డాడు. ఈసారి వెనుకటి కన్న పెద్ద నేరమే చేశాడు. ఆడ బానిసలను అమ్మడంలో బ్లాకుమార్కెట్టు చేస్తున్నాడన్న నేరం ఆరోపించబడింది! సుల్తాన్ ఇబాన్ - అల్ ఖుస్ ఈ పనిని ఇటీవలే నిషేధించారు.

ఈ సదవకాశాన్ని జారవిడుచుకోడానికి ఇష్టంలేని వజీరు అనీస్-ఉర్-రహమాన్ వెంటనే ఖాసింకి మరణశిక్ష విధించేశాడు. కాని, ఇదివరలో ఒకసారి

సుల్తానువారికి తెలియకుండా నిందితుణ్ణి ఉరి తీసెయ్యడానికి ప్రయత్నించి నందుకుగాను సుల్తాను తనని మందలించి ఉండడంచేత ఈసారి వజీరు ఖాసీంను రహస్యంగా చంపదలచుకోలేదు. పైగా, నేరం పెద్దదేనాయిరి. దావరికం దేనికి? ఖాసీమును సుల్తాను వారికి అర్జీ పెట్టుకోనిచ్చాడు

ప్రత్యేకంగా ఈ కేసు విషయమై విచారించడానికి సుల్తాను కొలువు తీరి ఉన్నాడు. వజీరు, ఇతర పెద్దలూ ఉచితాసనాలలో కూర్చుని ఉన్నారు. కాళ్ళకు సంకెళ్ళతో ఖాసిం ఒక మూల నిలుచుని ఉన్నాడు.

శాసనం తాను చేసినదే కనుక మరణ శిక్షను పూర్తిగా కొట్టివేయడం సుల్తానుగారికి కూడా సాధ్యం కాలేదు కాకపోతే, ఖాసిముకి శిక్ష తప్పించుకునే చిన్న అవకాశం ఒకటి ఇవ్వదలచాడు.

అది ఏమిటంటే—

రెండు సరిసమానమైన తట్టలు బల్లమీద పెట్టేరు. వాటిలో చెరో 50 బంతులు ఉన్నాయి. ఒక్కొక్క తట్టలోని 50 బంతులలో సగం తెల్లనివీ సగం నల్లనివీనూ. ఈ నలుపు తెలుపుల బేధం తప్ప ఆ బంతులు మరేవిధమైన భేదం లేకుండా ఒకే ఆకృతి, బరువు, నునుపు కలిగి ఉన్నాయి.

ఇప్పుడు నిందితుణ్ణి కళ్ళకు గంతలు కట్టి ఆ బల్ల దగ్గరకు తీసుకు వెడతారు. నిందితుడు ఆ రెండు తట్టలలో ఏదో ఒక దానిని ముట్టుకుని, అందులోనుంచి ఏదో ఒక బంతిని బయటికి తియ్యాలి. అతడు తీసిన బంతి నల్లనిదైతే అతడికి మరణశిక్ష ఖాయం, తెల్లని బంతితీస్తే ఆ శిక్ష రద్దు అవుతుంది.

అంటే- ఖాసిం బతకడానికి 50% అవకాశం ఉన్నదన్న మాట!

ఈ పరిస్థితిలో ఖాసిం ఒక విన్నపం చేసుకున్నాడు. "హుజూర్! నా ఆఖరి కోరిక ఒకటి ఉంది. నా కళ్ళకు గంతలు కట్టేముందు ఈ రెండు తట్టలలోని బంతులనూ కొద్దిగా మార్పులు చెయ్యనివ్వండి. అంతే నేను కోరేది. తరవాత అల్లా ఇచ్ఛ ఎలా ఉంటే అల్లా జరుగుతుంది."

సుల్తాను వస్తున్న చిరునవ్వును ఆపుకుంటూ, వజీరుకేసి తిరిగి, "అతని కోరికను అంగీకరించడంవల్ల మనకు పోయేదేముంది? అతడు తప్పించుకుపోయే అవకాశాలు ఏమీ పెరగవుకదా?" అన్నాడు.

"నిజమే హుజూర్! మొత్తం ఉన్నవి 50 నల్లబంతులూ, 50 తెల్లబంతులూనూ- వాటిని ఎన్ని విధాలుగా మార్చినా మొత్తం సంఖ్య మారదు. అతడు

తీసుకోవలసినది ఒకే ఒక బంతి. అది నలుపుదైనా కావచ్చు, తెలుపుదైనా కావచ్చు. కనుక అతడి కోరికను మన్నించవచ్చు సర్కార్!" అన్నాడు వజీరు.

"సరే. అంగీకరిస్తున్నాం రెండు తట్టలలోని బంతులనూ మా కళ్ళ ముందర నీకు తోచినట్లు మార్చుకోవచ్చు" అన్నాడు సుల్తాన్.

ఖాసిం సుల్తానుకి వంగి వంగి, ముమ్మారు సలాముచేసి, బల్ల దగ్గరకు వెళ్ళి, ఆ తట్టలలోని బంతులను ఏవేవో మార్పులుచేసి "అయింది హుజూర్!" అని వెనక్కి వెనక్కి నడుచుకుంటూ, సలాము చేసుకుంటూ, గోడమూలకి చేరుకున్నాడు.

ఇంతకీ అబ్దుల్ ఖాసిం ఏమి మార్పులు చేసి ఉంటాడు? అందువల్ల అతడికి కలిగే లాభం ఏమిటి?

జ వా బు :

ఖాసిం చేసిన మార్పు ఇదీ! ఒక తట్టలో ఉన్న 50 బంతులనూ రెండవ తట్టలో పోర్లించేశాడు. తరవాత ఒకే ఒక తెల్లబంతిని బయటికితీసి కాళీతట్టలో పడవేశాడు అంతే.

ఇప్పుడు మొదటి తట్టలో ఒక బంతి. రెండవ తట్టలో 59 నల్లబంతులూ 49 తెల్లబంతులూ ఉన్నాయి అన్నమాట.

ఈ మార్పులవల్ల అతడు చావును తప్పించుకొనే అవకాశం 40% నుండి 5% పెరిగింది! ఎల్లాగంటారా?

ఈ మార్పులు చేసిన తరువాత ఖాసిం కళ్ళకు గంతలు కట్టేసి, బల్లమీద పెట్టిన తట్టల స్థానాలు మార్చేసి, అతడిని బల్లదగ్గరకు తీసుకువెళ్ళి ఏదో ఒక తట్టను ముట్టుకోమంటారు. ఆ రెండు తట్టలలోనూ ఒకే ఒక తెల్లబంతి ఉన్న తట్టను ముట్టుకునే అవకాశం 50% కదా. ఆ తట్టను ముట్టుకున్నాడంటే అందులో ఉన్నది తెల్లబంతి ఒక్కటే కనుక, అతడు బతికిపోయినట్లే.

ఈ తట్టకి బదులు రెండవ తట్టను ముట్టుకున్నాడనుకుందాం. అందులో 50 నల్లబంతులు, 49 తెల్లబంతులూ ఉన్నాయి కనుక, అందులోనుంచి తెల్ల బంతిని బయటికితీసే అవకాశం 49/99 లేదా సుమారు 50% అన్నమాట. కనుక అతడు శిక్ష తప్పించుకునే అవకాశాలు బాగా పెరిగేయి.

ఇంతకీ అబ్దుల్ ఖాసిం అనబడే వ్యక్తి బతికి బట్టకట్టాడో లేదో తెలిసికోదగ్గ చారిత్రక ఆధారాలేవీ లభించలేదు.

* * *

# 14. ఎపోలో దేవత కోరిక

క్రీ.పూ. 430 వ సంవత్సరంలో ఏథెన్సు నగరంలో ప్లేగువ్యాధి భయంకరంగా వ్యాపించింది. ఆ వ్యాధిని నిర్మూలించమని దేవుళ్ళకు మొక్కుబడులూ, జాతరలూ సాగుతున్నాయి. ఎపోలో పూనిన ఒక వ్యక్తి శివం ఎత్తినట్లు ఊగిపోతూ ప్లేగు నివారణకి ఏమిచెయ్యాలో వివరిస్తున్నాడు. ఎపోలో దేవత విగ్రహాన్ని ప్రతిష్ఠించిన ఘనాకారపు వేదికను సరిగ్గా రెట్టింపు పెద్దదిగా నిర్మిస్తే ఈ వ్యాధి తగ్గిస్తాను అన్నాడు.

ఇంత సులభంగా దేవత కనికరిస్తున్నందుకు ప్రజలు మహానంద భరితులు అయారు. వెంటనే పని మొదలుపెట్టారు. ఆ వేదికయొక్క పొడవు, వెడల్పు ఎత్తులను రెట్టింపుచేసి, ఘనాకారంలో కొత్తవేదికను తయారుచేశారు.

అదేమి చిత్రమోకాని ప్లేగు తగ్గకపోగా మరింత పెచ్చు పెరిగిపోయింది. భయభ్రాంతులైన భక్తులు ఆ దేవిని తమ అపరాధం ఏమిటో తెలియజెప్పవలసిందిగా కోరారు. భజనలు చేశారు.

ఆ దేవత పూనిన వ్యక్తి దేవి తరపున ఇల్లా అన్నాడు: "నేను కోరినట్లుగా మీరు చెయ్యలేదు. అందుకే నాకు కోపం వచ్చింది ప్లేగు విజృంభించింది."

భక్తులు తెంపలు వేసుకున్నారు.

"దేవి కోరినట్లుగానే వేదికను రెట్టింపు చేశాం కదా? ఇందులో లోపం ఎక్కడ ఉంది?"

"నేను కోరినట్లుగా మీరు చెయ్యలేదు. వేదిక ఘన పరిమాణం రెట్టింపు కావాలి అన్నాను నేను. మీరు 8 రెట్లు చేశారు - చూసుకోండి."

భక్తులు మొగమొగాలు చూసుకున్నారు. తాము చేసిన తప్పు అర్థమైంది. భుజముల కొలతను రెట్టింపు చేయడం తప్పయిపోయింది. ఘన పరిమాణాన్ని రెట్టింపు చెయ్యాలి. భుజముల కొలత ఎంత ఉంటే వెనుకటి వేదికకి రెట్టింపు ఘనపరిమాణం వస్తుందో నిర్ణయించాలి. ఆ కొలతలలో కొత్తగా ఘనాకారపు వేదికను నిర్మించాలి. అదన్నమాట సమస్య.

గ్రీసులోని హేమా హేమీలు రాత్రింబవళ్లు ఆలోచించారు. చర్చించారు. కిందామీద పడ్డారు. ఊహూఁ. వారికి సాధ్యం కాలేదు.

ఇందులో అంతకష్టం ఏముంది అంటారా?

జ వా బు :

పాత వేదిక భుజము కొలత x క్యూబిట్లు అనుకుందాం. (క్యూబిట్ సుమారుగా ఒక మూరకి సమానం).

దాని ఘనపరిమాణం $= x^3$ ఘనపు క్యూబిట్లు.

కొత్త వేదిక ఘనపరిమాణం$= 2 \times 3$ ఘ.క్యూ.

కొత్త వేదిక భుజము$=$ y క్యూబిట్లు అనుకుందాం.

కనుక $y^3 = 2 \times 3$.

కనుక $y = x. 2^{\frac{1}{3}}$

2 యొక్క ఘన మూలము చేత పాత వేదిక భుజము కొలతను గుణిస్తే కొత్తవేదిక భుజము కొలత వస్తుంది.

కాని 2 యొక్క ఘనమూలం ఎంత? దీనిని ఖచ్చితంగా ఇంత అని నిర్ణయించడం సాధ్యంకాదు! అంటే, ఈ సంఖ్య ఇంత అని ఉజ్జాయింపుగా చెప్పవచ్చునేగాని నిర్దుష్టంగా ఇంత అని చెప్పలేము. $\pi$ విలువలాగే 2 యొక్క ఘనమూలం అనంత దశాంశ స్థానాలు కలది.

$2^{\frac{1}{3}} = 1.25992$..........................

మామూలుగా మూడు దశాంశ స్థానాలకన్న ఎక్కువ నిర్దుష్టంగా ఈ సంఖ్యను నిర్ణయించవలసిన అవసరం ఉండదు. "అవసరం ఉండదు" అంటే అర్థం అంత నిక్కచ్చిగా తాపీమేస్త్రీ లెవ్వరూ పని చెయ్యలేరు.

కాని, గ్రీకు విద్వాంసులు ఈ విధంగా తృప్తిపడేరకం కాదు. పనివాళ్లు నిర్మించగలరా లేరా అన్నది వాళ్ళకి ముఖ్యం కాదు. ఆ భుజము కొలత ఇంత అని తేలేవరకూ వారికి మనస్సులు ఊరట చెందవు.

ఈ సమస్య అనాటికే కాదు. ఈనాటికి అసాధ్యమే కనుకనే అపోలో దేవత కోరిక వారు తీర్చలేకపోయేరు.

మరి ఆనాడు విజృంభించిన ప్లేగువ్యాధి ఏ విధంగా నివారణమయిందో మనకు తెలియదు.

*　　　*　　　*

## 15. విచిత్ర తర్కం

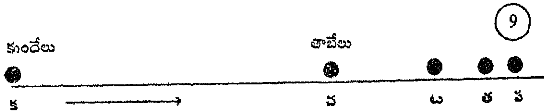
క్రీ. పూ. 496లో "ఎలియా" అనే చోట పుట్టిన జీనో అనే ప్రసిద్ధ గ్రీకు తత్త్వవేత్త కొన్ని విచిత్రమైన సమస్యలు తయారుచేశాడు. ఆయన తర్కానికి సమాధానాలు చెప్పలేక హేమాహేమీల వంటి శాస్త్రజ్ఞులు 23 శతాబ్దాల పాటు తలకిందులు అయిపోయారు. అవి ఈనాటికీ వింతగానే కనిపిస్తాయి. మీకు ఏదైనా కొరుకుడు పడతాయేమో ప్రయత్నించండి.

## 1. కుందేలు - తాబేలు సమస్య

అనగా అనగా ఒక కుందేలు, ఒక తాబేలు పరుగు పందెం వేసుకున్నాయి. తాబేలుకన్న పదిరెట్ల వేగంతో పరుగెత్తగల కుందేలు ధీమాగా తాబేలుకి 1000 మీటర్లు వెనుక నిలువబడి, వన్-టూ-త్రీ అని పరుగు మొదలు పెట్టింది. అంటే మొట్టమొదట "క" అనేచోట కుందేలు, "చ" అనేచోట తాబేలు నిలుపబడ్డాయి. "క చ" = 1000 మీటర్లు.

కుందేలు "చ" అనే చోటికి చేరుకునేసరికి తాబేలు 100 మీటర్లు ఎదరకి పాకి "ట" అనే చోటుకి చేరుకుంది.

మళ్ళీ కుందేలు "ట" అనేచోటికి చేరుకునేసరికి తాబేలు మరో 10 మీటర్లుపాకి, "త" అనే చోటికి చేరుకుంది.




కుందేలు "త" దగ్గరకు వచ్చేసరికి తాబేలు మరో మీటరు ఎదరకు జరుగుతుంది............దీనికి అంతులేదు. తాబేలు అంతకుముందు విడిచిపెట్టిన చోటికి కుందేలు చేరుకునేలోగా తాబేలు మరికొంచం దూరం ఎదరకు జరిగిపోతూ ఉంటుంది.

కనుక కుందేలు తాబేలును ఎన్నటికీ అందుకోలేదు. కనుక కుందేలు ఎన్నటికీ పందెం నెగ్గలేదు!

ఆశ్చర్యంగా ఉందికదూ? కాని, నిత్యవ్యవహారంలో కుందేలు తాబేలును అవలీలగా ఓడించెయ్యగలదని మనకు తెలుసు. అయితే పైన కనబరచిన జీనో గారి తర్కంలో తప్పు ఎక్కడ?

*　　　*　　　*

## 2. అసాధ్య ప్రయాణం




ఒకడు "క" అనేచోట (కమలాపురం) బయలుదేరి "చ" అనే చోటు (చక్రపురం)ను చేరుకోవాలని ఉద్దేశంతో నడక మొదలు పెట్టెడు. అతడు

ఎంత వేగంగా ప్రయాణం చేసినా సరే చక్రపురం చేరుకోవడం అసాధ్యం అంటాడు జీనో. ఆయనగారి తర్కం విందాం.

ముందర "క చ"ల మధ్యదూరంలో సగం దూరం ప్రయాణం చెయ్యాలి. ఆ తరవాత ఇంకా మిగిలిన దూరంలో సగందూరం వెళ్ళాలి. ఆ తరువాత మిగిలిన దూరంలో సగం, ఆ తరవాత మిగిలిన దూరంలో సగం........దీనికి అంతులేదుకదా? ఎంతసేపు నడిచినా మరికొంచెందూరం మిగిలిపోతూనే ఉంటుంది కదా? కనుక కమలాపురంనుంచి చక్రపురం చేరుకోవడం అసాధ్యం?

"క-చ"ల మధ్యదూరం ఎంత అయినా సరే ఈ తర్కం వర్తిస్తుంది. కనుక అసలు కదలడమే అసాధ్యం!

అయితే ఈ తర్కంలో తప్పు ఎక్కడ?

* * *

## 3. శరవేగం

ఒకడు వింటికి బాణం తొడిగి, నారి అకర్ణాంతమూ లాగి వదిలేడు. ఆ బాణం గాలిలో ప్రయాణం చేస్తోంది. ప్రతిక్షణమూ ముందుకి ప్రయాణం చేస్తూనే ఉంటుంది కదా? కాని ఏక్షణంలో చూసినా ఆ బాణం ఏదో ఒక స్థలంలో ఉండి తీరాలికదా? ఏక్షణంలో చూసినా ఆ బాణం ఏదో ఒక స్థలంలో ఉండడం అనేదే నిజమైతే అసలు ప్రయాణం చేయడం ఎలా సాధ్యం? ఏమంటే- కదులుతోంది అనేమాటకు అర్థం ఆ బాణం ఎక్కడా లేదనికదా? అంటే బాణం కదలడంలేదని అర్థం!

ఏమిటీ చిత్రం?

జవాబులు :

కుందేలు పరుగు పెట్టిన దూరాలు మన సమస్యలో ఈ క్రింది విధంగా ఉంటాయి.

$$1000 + 100 + 10 + 1 + 0.1 + 0.01 + 0.001 \ldots\ldots$$ మీటర్లు.

వెళ్ళినకొద్దీ ఈ సంఖ్యలు పదేసి రెట్లు తక్కువ అవుతూ ఉంటాయి. దీనిని "అభిసారీ శ్రేణి" (convergent series) అంటారు ఈ సంఖ్యలు అనంతంగా ఉన్నప్పటికీ వీటి మొత్తం మాత్రం అనంతమైనది కాదు.

పై లెక్కలో ఈ మొత్తం దూరం $1111\frac{1}{9}$ మీటర్లకి సమానం అవుతుంది. పైన వివరించిన తర్కం ఏమి చెబుతుంది అంటే - కుందేలు తాబేలును

$1111\frac{1}{9}$ మీటర్ల లోపున అధిగమించలేదు అని మాత్రమే. కుందేలు $1111\frac{1}{9}$ మీటర్ల దూరం పరుగెత్తితే తాబేలును అందుకుంటుంది. ఆ తరువాతి క్షణంలో దానిని దాటేస్తుంది.

"అనంతరం" (Infinity) అనే మాటకు గణితార్థం సరిగ్గా తెలియని రోజులలో, "అనంతశ్రేణి" (Infinity series) తాలూకు ధర్మాలు సరిగ్గా అవగాహనకాని కాలంలో జీనో సమస్యలు నిజంగానే ఆశ్చర్యకరంగా ఉండేవి.

ఇల్లాగే అసాధ్య ప్రయాణమూనూ. మొత్తం ప్రయాణం చేయవలసిన దూరం "ఒకటి" అనుకుంటే పైన చెప్పిన తర్కం ప్రకారం ఎప్పటి కప్పుడు మిగిలిన దాంట్లో సగం దూరం అని వేసుకుంటూ వెడితే -

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\cdots\cdots$$

ఈ విధంగా అనంత సంఖ్యలు వస్తాయి. అనంత సంఖ్యలు వస్తాయి అన్నంతవరకూ జీనోవాదం సరిగానే ఉంది కానీ, ఈ అనంత సంఖ్య శ్రేణి మొత్తం మాత్రం అనంతం కాదు.

శరవేగపు సమస్య మరింత క్లిష్టమైనది. సెకనుకి 100 మీటర్ల వేగంతో బాణం ప్రయాణం చేస్తోంది అనుకుందాం. అంటే, సెకనులో వెయ్యవ వంతు వ్యవధిలో 10 సెం.మీ. దూరం వెడుతుంది. సెకనులో లక్షవ వంతు వ్యవధిలో 1 మిల్లీమీటరు దూరం వెడుతుంది. సెకనులో కోటవ వంతు వ్యవధిలో మిల్లీ మీటరులో వందవ వంతు దూరం వెడుతుంది. ఈ విధంగా ఎంత అల్పాల్పమైన కాలవ్యవధిని తీసుకున్నప్పటికీ ఆ వ్యవధిలో బాణం ఒకచోటి నుంచి మరో చోటికి కదిలితీరుతుంది.

కనుక ప్రతి క్షణమూ బాణం ఏదో ఒకచోట ఉండాలి అనే మాటకు అర్థం ఏమిటి? ఈ కాలవ్యవధి సున్నకి సమానం అయితే తప్ప బాణం స్థిరంగా ఏదో ఒకచోట ఉన్నదనుకోవడం సాధ్యం కాదు. "అత్యణు" (Infinitesimal) అనే గణిత విభాగం అర్థం అయాక ఈ సమస్య కూడా విడిపోయింది.

* * *

# 16. బేసి గులకరాళ్ళు

ఈ ఆట ఇద్దరు వ్యక్తులు ఆడాలి.

బేసి సంఖ్యలో గులకరాళ్ళుగానీ, చింతగింజలుగానీ తీసుకుని, ఇద్దరి మధ్యనీ కుప్పగా పోస్తారు. వారిలో ఒకడు ఆ కుప్పలోనుంచి ఒకటిగాని, రెండు గానీ, మూడుగానీ గులకరాళ్ళు తీసుకుని తన దగ్గర ఉంచుకుంటాడు. తరవాత రెండోవాడు అదేవిధంగా 1 గాని, 2 గాని, 3 గాని (ఈ మూడు సంఖ్యలలో తనకు తోచినన్ని) రాళ్ళు తీసుకుని తన దగ్గర ఉంచుకుంటాడు. తరవాత మొదటివాడు, ఆ తరవాత రెండోవాడు.... ఈ విధంగా ఆ కుప్పలోని రాళ్ళు అన్నీ పూర్తి అయిపోయేదాకా తీసుకుంటూ పోతారు. ఆఖరున ఎవరికి ఎన్ని వచ్చాయో లెక్క పెట్టుకుంటారు. బేసి సంఖ్యలో గులకరాళ్ళు వచ్చినవాడు నెగ్గినట్లూ, సరిసంఖ్య రాళ్ళు తీసుకున్నవాడు ఓడినట్లూ లెక్క.

ఇంతే ఆట.

చూడడానికి ఇది చాలా సులమైన ఆటలాగ కనిపిస్తుంది కానీ, నిజానికి అంత సులువు ఏమీకాదు. ఆట నెగ్గి తీరాలని పట్టుపట్టి, పందెం కాచి, జాగ్రత్తగా ఆలోచించి, ఇద్దరూ ఆట కొనసాగిస్తే ఆఖరికి ఎవరు నెగ్గుతారో చెప్పగలరా?

ఉదాహరణకి : 15 గులకరాళ్ళతో ఆట మొదలు పెట్టేరనుకో, ఎవరు నెగ్గుతారు? తరువాత అదే ఆట 13 గులకరాళ్ళతో ఆడేరనుకో, అప్పుడు ఎవరు నెగ్గుతారు? ఎవడి అదృష్టం బాగుంటే వాడు నెగ్గడమేనా? లేక ఆటలో నేర్పుకీ, ఆలోచనకీ అవకాశాలు ఉన్నాయా?

*　　　*　　　*

జవాబు :

15 గులకరాళ్ళ ఆటలో మొదటివాడు రెండురాళ్లు తీసుకుంటే నెగ్గుతాడు. ఎల్లాగంటే తన వంతు ఎప్పుడు ఆటవచ్చినా తన దగ్గర ఉన్న రాళ్లు సరి సంఖ్యలో ఉన్నట్లయితే, కింది కుప్పలో 4 గాని, 5 గాని, 12 గాని రాళ్లు మిగిలి పోయేటట్లు కుప్పలోనుంచి రాళ్లు తీసుకుంటూ ఉండాలి. లేదా, తన దగ్గర ఉన్న రాళ్లు బేసి సంఖ్యలో ఉన్నట్లయితే 1 గాని, 9 గాని రాళ్లు కింద మిగిలిపోయేటట్లు చెయ్యాలి. ఇదీ రహస్యం.

13 రాళ్ళతో ఆట మొదలు పెడితే మొదటివాడు ఓడిపోతాడు (రెండో వాడు సరిగ్గా ఆడితే).

మొదటి వాడు ఎప్పుడు నెగ్గుతాడో, ఎప్పుడు ఓడిపోతాడో ఖచ్చితంగా చెప్పేపద్ధతి ఉంది. మొట్టమొదట పోగుగా పోసిన రాళ్లు 5 గాని, 13 గాని, 21 గాని, 29 గాని, 37 గాని, 45 గాని అయితే మొదటివాడు ఓడిపోతాడు. ఈ

సంఖ్యల సామాన్య రూపం $(8N+5)$; ఇందులో $N = 0, 1, 2, 3, 4, 5....$ అని విలువలు ఇచ్చుకుంటూ వెడితే పైన చెప్పిన సంఖ్యలు వస్తాయి.

పైన చెప్పిన సంఖ్యలు తప్ప మరి ఏ ఇతర బేసి సంఖ్య గులకరాళ్ళు ఉపయోగించినా సరే - మొదటివాడు నెగ్గుతాడు.

ఈ ఆటకి ఇంతకన్న సామాన్య రూపాన్ని ఈ క్రింది విధంగా వ్రాయవచ్చు:

మొత్తం రాళ్ళు $x$ అనుకో.

తడవకు తీసుకోవలసిన రాళ్ల కనిష్ఠ సంఖ్య $= a$ అనీ, గరిష్ఠ సంఖ్య $= m$ అనీ అనుకుందాం (పైన చూపిన ఆటలో $a = 1$ అనీ, $m = 3$ అనీ అనుకున్నాం.)

ఎదుటి వ్యక్తి దగ్గర "బేసి" సంఖ్యలో అప్పటికే కొన్ని రాళ్ళు ఉన్నట్లయితే, నువ్వు నెగ్గడానికి క్రింద వదిలి పెట్టవలసిన రాళ్ళ సంఖ్య $W$ అయితే, వాటి సంబంధాన్ని ఈ క్రింది ఫార్ములా చూపిస్తుంది.

$W = 2x(a+m) + (a+m)$.... (1) లేదా -

$W = 2x(a+m) + a$ .... (2)

$a$, $m$, $x$, ల విలువనుబట్టి $W$ కి పై రెండురకాల విలువలూ ఉంటాయి.

ఎదుటి వ్యక్తి దగ్గర "సరి" సంఖ్యలో అప్పటికే కొన్నిరాళ్ళు ఉన్నట్లయితే, నువ్వు నెగ్గడానికి క్రింద వదలవలసిన రాళ్ళ సంఖ్య -

$W = 2x(a+m) + (2a+m)$........ (3) లేదా

$W = 2x(a+m)$............................. (4)

ఉదాహరణకి : $a = 1$ ; $m = 3$ అయితే -

$W$ (బేసి) $= 8x + 4$ ........ (1)

$W$ (బేసి) $= 8x + 1$ ........ (2)

$W$ (సరి) $= 8x + 5$ ........ (3)

$W$ (సరి) $= 8x$ ........ (4)

కనుక ఎదుటి వాడి దగ్గర "బేసి" సంఖ్యలో రాళ్ళుంటే 1, 9, 17, 25....గానీ, లేదా 4, 12, 20, 28, ....గాని క్రింద వదలిపెట్టు.

ఎదుటి వాడి దగ్గర "సరి" సంఖ్యలో రాళ్ళు ఉంటే, 8, 16, 24. 32....గానీ, లేదా -

5, 13, 21, 29,....గాని క్రింద వదలి పెట్టాలి నువ్వు.

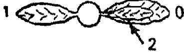
*　　*　　*

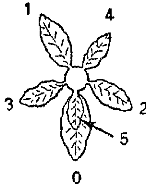
# 17. ఖగోళశాస్త్రంలో వృక్షశాస్త్రం

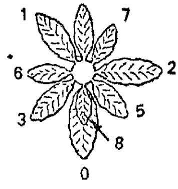
ఖగోళశాస్త్రానికీ వృక్షశాస్త్రానికీ సంబంధించిన చిత్రమైన సంగతి ఒకటి ఉంది.

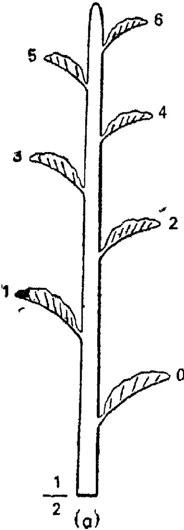
అప్పుడప్పుడే మొలిచి పెరుగుతున్న మొక్కల చిగుళ్ళను గమనిస్తే ఒక చమత్కారం కనిపిస్తుంది. కాండం చుట్టూ ఆకులు ఒక ప్రత్యేకమైన క్రమంలో పెరుగుతూ ఉంటాయి. ఒక ఆకునుంచి దానిపైనున్న మరో ఆకు దగ్గరకు కాండం వెంబడే వెళ్ళాలంటే సగం చుట్టు తిరగాలి కొన్ని చెట్లలో. అంటే 180°

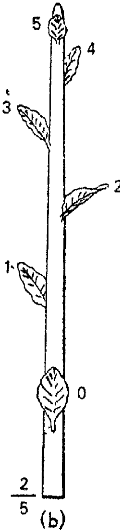
(10)

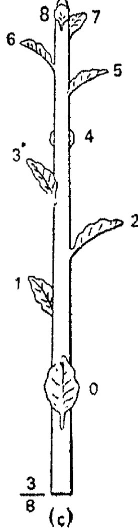


కోణం తిరిగితే మరో ఆకు వస్తుంది. మరో సగం చుట్టు తిరిగితే మరో ఆకు. అంటే ఒక పూర్తి చుట్టు తిరిగే సరికి రెండు ఆకులు తగులుతాయి. దీనినే 1/2 అని వ్రాద్దాం. అన్నిరకాల గడ్డిమొక్కలు (వరి వగైరా ధాన్యపు మొక్కలు) ఈ తరగతి కిందికి వస్తాయి. ఈ తరగతిలో ఆకులన్నీ కాండం మీద రెండే రెండు ఎదురెదురు వరుసలలో పెరుగుతాయి. 1, 3, 5, 7, 9.... సంఖ్యలుగల ఆకులన్నీ ఒక వరుసలోనూ, 2, 4, 6, 8 ... సంఖ్యలుగల ఆకులన్నీ వాటికి ఎదురు వరుసలోనూ పెరుగుతాయి.

మరికొన్ని రకాల మొక్కలలో కాండం చుట్టూ ఒక చుట్టు తిరిగేసరికి 3 ఆకులు ఎదురు అవుతాయి. అంటే, ఆకుకీ ఆకుకీ మధ్య 120° కోణం ఉంటుంది. 1, 4, 7, 10.... సంఖ్యల ఆకులు ఒక వరుసలోను; 2, 5, 8, 11.... సంఖ్యల ఆకులు మరో వరుసలోనూ; 3 6, 9, 12 ... సంఖ్యల ఆకులు వేరొక వరుసలోనూ—ఈ విధంగా కాండం చుట్టూ 3 వరుసలలో పెరుగుతాయి. దీనిని 1/3 అని వ్రాయవచ్చు. "సెడ్జి" జాతి మొక్కలు ఈ తరగతి కిందకి వస్తాయి.

వాటి తరువాత మరికొన్ని మొక్కలలో కాండం చుట్టూ రెండుసార్లు తిరిగితే 5 ఆకులు ఎదురవుతాయి. అంటే 144° కోణం తిరిగేసరికి ఒక్కొక్క ఆకు ఎదురవుతూ ఉంటుంది. దీనినే 2/5 అని వ్రాద్దాం. ఏపిల్, చెర్రీ, రేగు వంటి చెట్లు ఈ తరగతి కిందికి వస్తాయి.

వీటి తరువాత కొన్ని చెట్లలో కాండం చుట్టూ 3 సార్లు తిరిగేసరికి 7 ఆకులు ఎదురవుతాయి. అంటే ఆకుకీ ఆకుకీ మధ్య 135° కోణం ఉంటుంది. దీనిని 3/8 అని వ్రాద్దాం అరటిచెట్లు ఈ తరగతి కిందకి వస్తాయి.

ఈ తరగతులన్నిటినీ వరుసగా వ్రాస్తే-

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{3}{8}, \frac{5}{13}. \frac{8}{21}, \frac{13}{24} \ldots$$

అనే శ్రేణి (Series) ఏర్పడుతుంది.

సృష్టిలో ఈ విధంగా తప్ప ఆకుల క్రమం మరేవిధంగానూ ఉండదు. ప్రకృతిలో ఏ మొక్క ఆకులను గమనించినా ఈ శ్రేణిలో ఏదో ఒక సంఖ్యలో ఇమిడి ఉంటుంది.

ఉదాహరణకి : కొమ్మచుట్టూ ఒకసారితిరిగితే 4 ఆకులు ఉండే చెట్టు (1/4) ఏదీ లేదు. ఎంత వెతికినా అటువంటి మొక్క కనబడదు. చిత్రంగా ఉంది కదూ?

పైన వ్రాసిన శ్రేణిలోని సంఖ్యలను జాగ్రత్తగా గమనించండి. ఏ రెండు పక్కపక్క భిన్నములను తీసుకున్నా సరే వాటి లవములను, వాటి హారములనూ వేరువేరుగా కూడితే వచ్చే మొత్తములు వాటి తరువాతి భిన్నం తాలూకు లవ హారములు అయి ఉంటాయి. ఉదాహరణకి: 1/2, 1/3 అనే పక్కపక్క భిన్నములను తీసుకుందాం. వీటి లవములను, హారములను కూడితే $\frac{1+1}{2+3} = \frac{2}{5}$ అనే సంఖ్య వస్తుంది. ఇదే ఆ శ్రేణిలో మూడవ సంఖ్య.

అల్లాగే $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{5}$ అనే పక్క పక్క భిన్నములను తీసుకొని లవములను,హారములను కూడితే $\frac{1+2}{3+5} = \frac{3}{8}$ వస్తుంది. ఇదే ఆ శ్రేణిలో 4 వ సంఖ్య.

అల్లాగే ఆ శ్రేణిలోని 3 వ సంఖ్య $\left(\frac{2}{5}\right)$ నీ, నాలుగవ సంఖ్య $\left(\frac{3}{8}\right)$ నీ తీసుకుంటే, $\frac{2+3}{5+8} = \frac{5}{13}$ అనే ఐదవ సంఖ్య వస్తుంది.

ఇల్లాగే మిగిలిన అన్ని సంఖ్యలూనూ. వీటిని "ఫిబొనాసీ సంఖ్యలు" అంటారు.

1175 లో ఇటలీలోని పీసా నగరంలో పుట్టిన లియొనార్డో ఫిబొనాసీ అనే ప్రసిద్ధ గణితశాస్త్రజ్ఞుడు కనిపెట్టిన సంఖ్యలు ఇవి. వీటికి గల విచిత్ర లక్షణాలమీద ఆయన పరిశోధన చేశాడు.

ఈ ఫిబొనాసీ సంఖ్యలమీద ప్రకృతికి ఇంత మోజు ఎందుకు కలిగిందో మనకు సరిగ్గా తెలియదు. చెట్లలో ప్రతి ఆకుకీ సూర్యరశ్మి సరిగ్గా తగలాలంటే ఆకులు ఈ విధంగా అమరి ఉండడం అవసరం కాబోలు!

ఇంచుమించుగా ఇటువంటి వరుస క్రమమే సౌర కుటుంబంలోని గ్రహములు సూర్యుని చుట్టూ తిరిగి రావడానికి పట్టే కాలములోనూ కనబడుతోంది.

సూర్యుడినుంచి 6 వ గ్రహమైన నెప్ట్యూన్ ఒక్కసారి సూర్యప్రదక్షిణం చేసి రావడానికి సుమారు 60,000 రోజులు పడుతుంది. 7 వ గ్రహమైన యురేనస్‌కి సూర్యునిచుట్టూ ఒకసారి తిరిగి రావడానికి 30,000 రోజులు పడుతుంది. వీటి నిష్పత్తి = 1/2.

అల్లాగే 6 వ గ్రహమైన శనియొక్క పరిభ్రమణ కాలం 10750 రోజులు. శని-యురేనస్‌ల పరిభ్రమణ కాలముల నిష్పత్తి సుమారు 1/3.

5 వ గ్రహమైన గురుని పరిభ్రమణ కాలం 4344 రోజులు. గురు - శని గ్రహాల పరిభ్రమణ కాలముల నిష్పత్తి సుమారుగా 2/5.

సౌరకుటుంబంలో 4 వ గ్రహం కుజుడు. కాని, కుజ-గురు గ్రహాలమధ్య కొన్నివేల లఘుగ్రహాలు (Asteroids) తిరుగుతున్నాయి బహుపురాతనకాలంతో కుజ-గురు గ్రహాల మధ్య మరొక గ్రహం ఉండేదనీ, అది ఏ కారణం చేతనో పగిలి తునాతునకలై పోయిందనీ, ఆ గ్రహం తాలూకు ముక్కలే ఈ లఘు గ్రహాలనీ ఒక సిద్ధాంతం ఉంది.

ఈ లఘుగ్రహాల పరిభ్రమణ కాలాలు 3½ సంవత్సరాలనుంచి 6 సంవత్సరాల వరకూ ఉన్నాయి. ఇక్కడ ఫిబొనాసీ సూత్రం సరిగా వర్తిస్తోందో లేదో చెప్పడం కష్టం. ఒకవేళ ఆ గ్రహం పగిలి పోకుండా ఉండి ఉంటే దాని పరిభ్రమణ కాలానికీ, గురు గ్రహ పరిభ్రమణ కాలానికి నిష్పత్తి 3/8 అయి ఉండాలి. అంటే, ఆ గ్రహం తాలూకు పరిభ్రమణ కాలం 4. 48 సంవత్సరాలు అయిఉండాలి. లఘుగ్రహాల సరాసరి పరిభ్రమణ కాలం 4.75 సంవత్సరాలు. ఎంత దగ్గరగా సరిపోతోందో చూశారుకదూ?

పైగా, ఈ వేలాది లఘు గ్రహాలు వెర్రివాడి చేతిరాళ్ళల్లాగ చెల్లాచెదురుగా తిరగడంలేదు. అవి ముఖ్యంగా మూడు గుంపులుగా ఉన్నాయి. వీటి పరిభ్రమణ కాలాలకూ, గురుగ్రహ పరిభ్రమణ కాలానికి నిష్పత్తులు గురించి చూస్తే 1/2, 1/3, 2/5 వచ్చాయి! ఇవి మళ్ళీ మన ఫిబొనాసీ సంఖ్యలే కదా!

లఘు గ్రహాల తరువాత గ్రహం కుజుడు దీని సూర్యప్రదక్షిణ కాలం 687 రోజులు (లేదా 1.382 సంవత్సరాలు.) దీనికి లఘుగ్రహాల సరాసరి పరిభ్రమణ కాలమైన 4.75 సంవత్సరాలకి నిష్పత్తి చూస్తే 5/13 కి చాలా చేరువలో ఉంది.

ఫిబొనాసీ సంఖ్యలు సౌరకుటుంబ పరిభ్రమణ కాలాలకు ఇంత దగ్గరగా సరిపోవడం ఆశ్చర్యకరమైన విషయంకదూ? ఖగోళ పిండములకీ, భూమి మీది వృక్షముల ఆకులకీ ఈ పోలిక ఎందుకు వచ్చిందో?

చెట్ల ఆకులన్నిటికీ సూర్యరశ్మి సరిగ్గా అందడానికి ఈ అమరిక అవసర మైనట్లే, గ్రహకక్ష్యలు గురుత్వాకర్షణకు లోబడి స్థిరంగా ఉండాలంటే ఈ నిష్పత్తులలో సర్దుకుని ఉండడం అవసరమేమో!

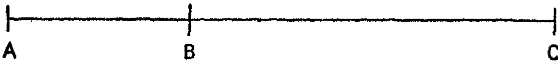
చెట్ల ఆకులను నిశితంగా పరిశీలించి ఉంటే శాస్త్రజ్ఞులకు బహుకాలం క్రిందటే అజ్ఞాతంగా ఉండిపోయిన లఘుగ్రహాల, యురేనస్, నెప్ట్యూన్ గ్రహాల ఉనికి తెలిసి ఉండేదేమోకదూ?

## బంగారు అడ్డకోత (Golden Section)

చెట్ల కొమ్మల చుట్టూ ఆకులు సర్దుకున్న పద్ధతిలో మాత్రమే కాకుండా రకరకాల పువ్వుల రేకులు, ఉల్లిపాయపొరలు, అనాసకాయలమీది కళ్లు వంటి ప్రకృతి సహజమైన విషయాలు ఎన్నెన్నో ఈ ఫిబొనాసీ శ్రేణులలో అమరి ఉన్నాయి, జాగ్రత్తగా గమనిస్తే.

క్రీస్తుపుట్టుకకి అనేక శతాబ్దాల పూర్వం గ్రీకు తత్త్వవేత్తలను విశేషంగా ఆకర్షించిన-క్షేత్రగణితానికి సంబంధించిన - చిత్రమైన సన్నివేశం ఒకటి ఉంది

(11)




$$\frac{AB}{BC} = \frac{BC}{AC} = \text{బంగారుకోత}$$

AC అనే ఏదో ఒక సరళరేఖ తీసుకుని, $\frac{AB}{BC} = \frac{BC}{AC}$ అయ్యేటట్లు దానిమీద B అనే బిందువును ఉంచాలి. దీనిని గ్రీకులు "బంగారుకోత" (Golden Section) అనేవారు. ఈ నిష్పత్తి $R = \left(\frac{\sqrt{5.1}}{2}\right) = 0.618034$ కి సమానం అని బీజగణిత సూత్రాలతో రుజువు చేయవచ్చు.

ఈ నిష్పత్తికి, ఫిబొనాసీ శ్రేణిలోని సంఖ్యలకి దగ్గర సంబంధం ఉంది. అది ఎల్లాగంటే—

0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21; 34, 55, 144, 233.......

అనే ఫిబొనాసీ శ్రేణిలో పక్క పక్క అంకెల నిష్పత్తులు క్రమంగా వెళ్ళిన కొద్దీ, బంగారు కోతకి సమానం అవుతాయి.

(1) $\frac{1}{1}$ = 1.000 000 (2) $\frac{1}{2}$ = 0.500 000

(3) $\frac{2}{3}=0.6666\ 7$ (4) $\frac{3}{5}=0\ 600\ 000$

(5) $\frac{5}{8}=0.625\ 000$ (6) $\frac{8}{13}=0\ 615\ 385$

(7) $\frac{13}{21}=0.619\ 048$ (8) $\frac{21}{34}=0.617\ 647$

(9) $\frac{34}{55}=0.618\ 182$ (10) $\frac{55}{89}=0.617\ 978$

(11) $\frac{89}{144}=0\ 618\ 056$ (12) $\frac{144}{233}=0.618\ 026$

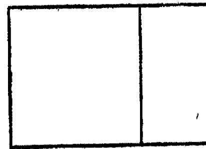
↓ 0.618 034 ↓ 0.618 034

ఇక్కడ బాణపు గుర్తుకి అర్థం ఏమిటంటే— ఈ సంఖ్యలు ఇంకా పెద్ద పెద్దవి తీసుకుంటే, ఆఖరికి వాటి నిష్పత్తులు "బంగారుకోత"కి సమానం అవుతాయి.

## అందమైన దీర్ఘచతురస్రం

(12)



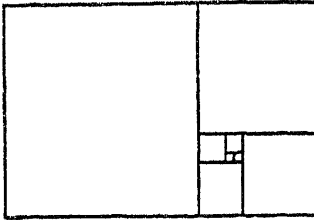


(0.618 034 దీర్ఘచతురస్రం, దానిని చతురస్రం, రెండవ 0.618 034 దీర్ఘచతురస్రంగా విభజన.)

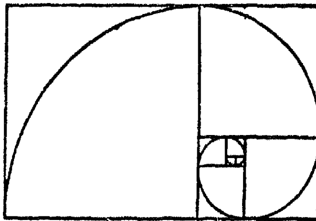
వెడల్పు / పొడవు=0.618 034కి సమానం అయేటట్లు ఒక దీర్ఘ చతురస్రాన్ని తీసుకుందాం. దీనిని ఒక గీతతో ఒక చతురస్రమూ, ఒక దీర్ఘ చతురస్రమూ ఏర్పడేటట్లు విభజిద్దాం. ఈ కొత్త దీర్ఘ చతురస్రంలో వెడల్పు/ పొడవు = 0.618034 అవుతుంది. ఈ విధంగా వచ్చిన 0.618034 దీర్ఘచతు రస్రాన్ని మళ్ళీ మళ్ళీ మళ్ళీ ఇదే విధంగా విభజించుకుంటూ పోతే ఏర్పడే

దీర్ఘచతురస్రాల వెడల్పు, పొడవుల నిష్పత్తి బంగారుకోతకి సరిపోయేటట్లుగానే ఉంటాయి.

ఈ చతురస్ర - దీర్ఘచతురస్ర శ్రేణిలో విభజన జరిపిన బిందువుల గుండా వక్రరేఖని గీసుకుంటూ పోతే "శంఖావర్తం" (Logrithmic Spiral) ఏర్పడుతుంది.



(0.618034 దీర్ఘచతురస్రాన్ని పునః పునర్విభజన చేయడం)

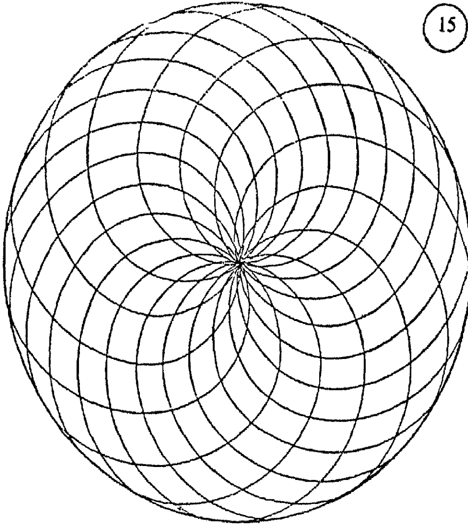


(శంఖావర్తం)

ఇదే స్పైరల్ నత్తగుల్లలలోనూ, పొద్దు తిరుగుడు పువ్వులలోని గింజల అమరికలోనూ, బంతిపువ్వుల రేకుల కూర్పులోనూ.... ఇంకా అనేకానేక సందర్భాలలో ప్రకృతిలో మనకు ఎదురవుతూ ఉంటుంది.

5 6 అంగుళాల వ్యాసం కలిగిన పొద్దుతిరుగుడు పువ్వుల తలభాగంలో గమనిస్తే— (గడియారపు ముళ్ళలాగ) సవ్య దిశలో తిరిగే శంఖావర్తాలు 34, అపసవ్య దిశలో తిరిగేవి 55 ఉంటాయి. చిన్న పువ్వులైతే 21/34 లేదా 13/21 ఉంటాయి. బాగా పెద్ద పువ్వులైతే 89/144 ఉంటాయి.

ఇవి అన్నీ ఫిబొనాసీ సంఖ్యలే. వీటి నిష్పత్తులు బంగారు అర్థకోతకి దగ్గరలో ఉంటాయి. ఈ సంఖ్యల మీద ప్రకృతికి ఎందుకో ఇంత మమకారం!



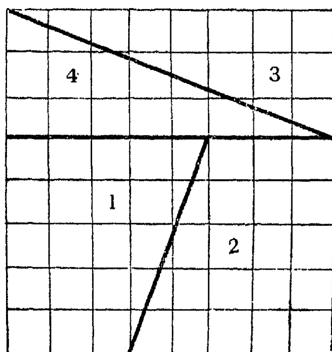

## ప్రొద్దుతిరుగుడు పువ్వులో గింజల పేర్పు

అన్నట్లు వెడల్పు, పొడవులు వేరు వేరు నిష్పత్తులలో ఉండే దీర్ఘ చతురస్రాలు అనేకం గీసి, "వీటిలో మీకు ఏది అందంగా కనిపిస్తోంది?'' అని వందలాది మందిని ప్రశ్నించగా, వారందరూ మెచ్చిన బొమ్మ బంగారుకోత కలదే అయిందిట! బహుశా మానవుడు కూడా ప్రకృతిలో భాగమే కనుక, ప్రకృతి ఎన్నుకున్న బంగారుకోత మానవ మేధస్సుకి కూడా ఆకర్షణీయంగా కనిపిస్తోందేమో!

*　　　*　　　*

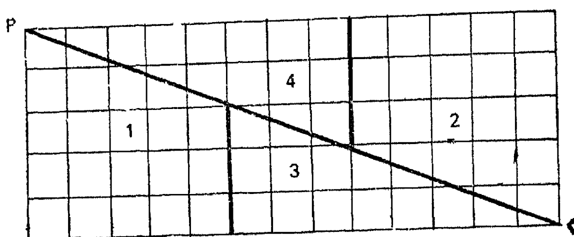
# 18. ఒక గది లాభం

ఏదో ఒక చదరం తీసుకో. దానిని $8 \times 8 = 64$ చదరపు గదులుగా విభజించు - చదరంగం బల్లమీది గదులుగా.

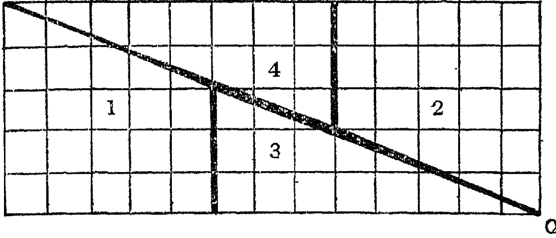



దానిని 16వ బొమ్మలో చూపిన మొద్దుగీతల మీదుగా జాగ్రత్తగా కత్తిరించి 4ముక్కలుగా విడదియ్యి.

తిరిగి ఈ నాలుగు ముక్కలనూ 17వ బొమ్మలో చూపించినట్లు అమరిస్తే దీర్ఘచతురస్రం ఏర్పడుతుంది.




చదరాన్ని కత్తిరించగా వచ్చిన ముక్కలతోనే ఈ దీర్ఘచతురస్రాన్ని నిర్మించాం కనుక ఈ రెండింటి వైశాల్యములూ సరిసమానంగా ఉండాలికదా? కాని, దీర్ఘచతురస్రపు పొడవు 13 గదులు, వెడల్పు 5 గదులు కనుక దీని వైశాల్యం$= 13 \times 5 = 65$ గదులు. కాని, చతురస్రం తాలూకు పొడవు 8 గదులు, వెడల్పు 8 గదులు కనుక దాని వైశాల్యం$= 8 \times 8 = 64$ గదులే!




అయితే ఆ 65 వ గది అదనంగా ఎక్కడినుంచి వచ్చింది?

జ వా బు :

నిజానికి 1, 2, 3, 4 అనే నెంబర్లు వేసిన ముక్కలు కలిపితే PQ అనే సరళరేఖ మీద సరిగ్గా సర్దుకోవు! మధ్యలో చిన్న సమాంతర చతుర్భుజం మిగిలి పోతుంది. దీనినే అతిశయీకరించి స్పష్టంగా తెలియడంకోసం 18 వ బొమ్మలో చూపించాను. కత్తిరింపులు బహు నిక్కచ్చిగా చేయడం సాధ్యంకాదు. కనుక ఈ చిన్న కాళీని ఎవరూ గమనించరు. అక్కడ ఉంది దోషం అంతా. ఈ కాళీస్థలం ఒక పూర్తి గదికి సమానం అవుతుంది.

ఈ గమ్మత్తు అంతా 5, 8, 13 అనే సంఖ్యల మధ్యనున్న సంబంధం వల్ల సాధ్యమైంది.

$5 \times 13 - 8 \times 8 = 1$

ఇందులో 5, 13 అనేవి దీర్ఘ చతురస్రపు భుజాలు. 8 అనేది చతురస్రపు భుజం. వీటి వైశాల్యముల భేదం $= 1$

నిజానికి ఇటువంటి గమ్మత్తును సృష్టించగల సంఖ్యలు ఇవి మాత్రమే కాదు, ఇంకా చాలా ఉన్నాయి. ఇవి అన్నీ "ఫిబొనాస్సీ శ్రేణి"లో దొరుకుతాయి.

0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377 ...

ఇందులో మొదటిది సున్న. రెండవది ఒకటి. ఆ తరవాత ఉన్న ప్రతీ సంఖ్యా దాని ముందున్న రెండు సంఖ్యల మొత్తానికి సమానం. ఎలాగంటే-

$0 + 1 = 1$

$1 + 1 = 2$

$1 + 2 = 3$

$2 + 3 = 5$

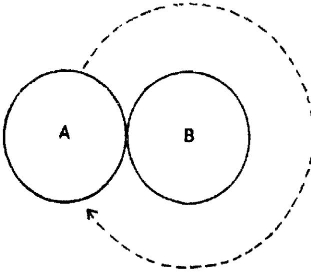
$3+5=8$
$5+8=13$
$8+13=21$
.... .... .... ....

ఈ ఫిబొనాస్సీ శ్రేణిలో ఏ మూడు వరుస సంఖ్యలను తీసుకున్నా వాటికి ఇంతకు ముందు వర్ణించిన చిత్రమైన ధర్మం ఉంది. ఉదాహరణకి : 2, 3, 5 అనే వరుస సంఖ్యలు తీసుకుందాం. అటూ ఇటూ ఉన్న సంఖ్యల లబ్ధంలో నుంచి నడిమి సంఖ్య యొక్క వర్గం తీసివేస్తే 1 మిగులుతుంది.

$2 \times 5 - 3 \times 3 = 1$
అల్లాగే 3, 5, 8 తీసుకుంటే
$5 \times 5 - 3 \times 8 = 1$
అల్లాగే 13, 21, 34 తీసుకుంటే
$13 \times 34 - 21 \times 21 = 1$
వీటి అన్నిటితోటి పైన చూపించిన గమ్మత్తు చెయ్యవచ్చు.

* * *

# 19. ప్రదక్షిణంలో గల్లంతు



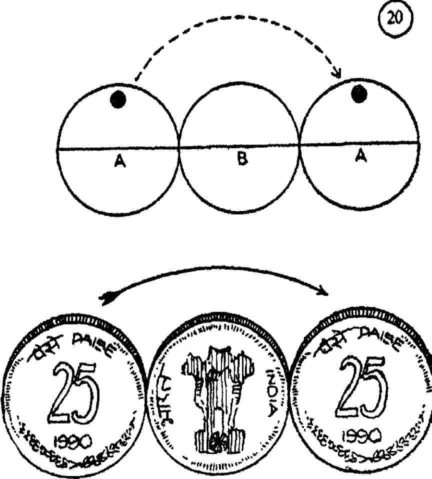

(19) ఒక పావలా కాసును (లేదా గుండ్రంగా ఉన్న ఏ నాణెం అయినా సరే) నేలమీద లక్కతో గాని, మైనంతో గానీ అతికించు. స్థిరంగా ఉన్న ఈ పావలా కాసు చుట్టూ మరొక పావలా కాసును తిప్పడం ఈగమ్మత్తులో ముఖ్యమైన ఘట్టం. ఈ తిప్పడంలో పాటించవలసిన నియమాలు రెండు ఉన్నాయి. ఈ రెండు పావలాల అంచులూ ఒకదాని కొకటి ఎప్పుడూ తగులుతూనే ఉండాలి. అంతేకాదు, చుట్టుతిరుగుతున్న పావలా "స్లిప్" అయిపోకూడదు. ఈ విధంగా స్థిరంగా ఉన్న పావలా చుట్టూ రెండవ పావలా ఒక చుట్టు తిరిగి బయలుదేరిన

చోటికి వచ్చేసరికి, ఈ రెండవ పావలా తన చుట్టూ తాను ఎన్ని ఆత్మ ప్రదక్షిణాలు పూర్తిచేస్తుంది?

రెండు నాణెములూ సరిసమానమైనవే కనుక, జారిపోకుండా తిప్పుతున్నాం కనుక ఒకసారి చుట్టుతిరిగి యథాస్థానానికి వచ్చేసరికి అది తన చుట్టూ తాను ఒక్కసారి మాత్రమే తిరుగుతుందని మీ ఊహ కదూ?

కాని అది తప్పు!

తిరుగుతున్న పావలా రెండు ఆత్మ ప్రదక్షిణాలు పూర్తి చేస్తుంది! ఈ విషయం నమ్మశక్యం కానట్లు ఉంటుంది కానీ, ఇది నిజం. సందేహం తీరకపోతే పైన వివరించినట్లు స్వయంగా చేసిచూడండి. రెండవ పావలామీద గుర్తు తెలియడానికి రంగు పెనిసిలుతో ఒక చోట చుక్కపెట్టు. ఈ చుక్కని



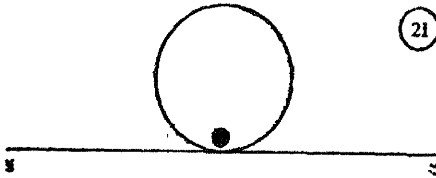

పరిశీలిస్తూ ఉంటే నాణెం పూర్తిగా చుట్టు తిరిగినదీ లేనిదీ తెలుస్తుంది. స్థిరంగా ఉన్న నాణెం చుట్టూ సగదూరం తిరిగేసరికి మన పెనిసిలు గుర్తు యథాస్థానానికి

వచ్చేస్తుంది. అంటే ఒక చుట్టుపూర్తి అయిందన్న మాట మరో అర్ధభాగం తిరిగితే మరో ఆత్మ ప్రదక్షిణం పూర్తి అవుతుంది.

ఇది చాలా చిత్రంగా ఉండడంతో మన తర్కశక్తి మీద మనకే నమ్మకం లేకుండా పోతుంది.

మరో తమాషా చూడండి:

ఒక పావలాకాసు తీసుకుని దాని అంచుచుట్టూ ఒక బలమైన దారాన్ని బిగించికట్టి తరువాత ఆ దారాన్ని విడదీసి, నేలమీద సరళరేఖలాగ సాగదీసి పట్టుకో. ఈ దారంపొడవు పావలా కాసు చుట్టుకొలతకి సమానమే కదా? ఇప్పుడు ఈ దారానికి ఒక కొనదగ్గర పావలాకాసు అంచుమీద నిలువబెట్టి, స్లిప్ అయిపోకుండా దారం వెంబడే దొర్లించుకుంటూ రెండవ కొనదగ్గరకు వచ్చేసరికి ఆ పావలాకాసు ఎన్ని చుట్లు తిరుగుతుందో చెప్పగలరా?




పై గమ్మత్తుతో గజిబిజి అయిపోయిన కొందరు ఈ రెండవ సమస్యను చూచి "రెండు చుట్లు తిరుగుతుంది" అని వెంటనే జవాబు చెప్పేస్తారు. కాని అది తప్పు. నిజానికి ఆ నాణెం ఒక్క చుట్టు మాత్రమే తిరుగుతుంది!

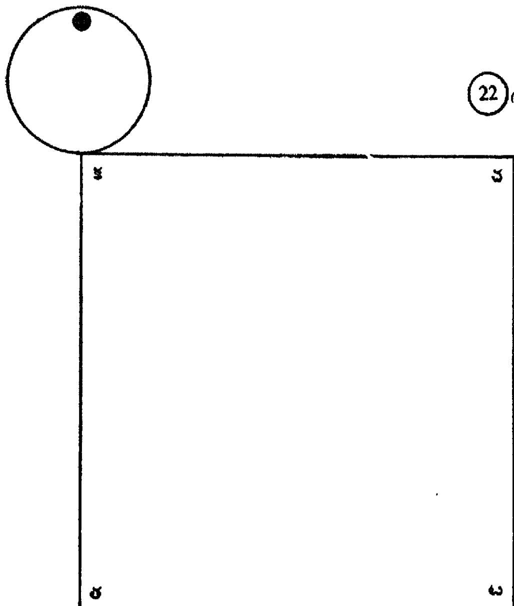
ఈ రెండు గమ్మత్తులకి భేదం ఏమిటి? రెండింటిలోనూ జరిగిన మొత్తం దూరం పావలాకాసు చుట్టుకొలతలకి సమానమేకదా? అయినప్పటికి మొదటి గమ్మత్తులో రెండు చుట్లు తిరిగిన పావలాకాసు, రెండవ గమ్మత్తులో అదే దూరానికి ఒక్కసారి మాత్రమే ఎందుకు తిరిగింది?

మరో తమాషా చూద్దాం:

22 వ బొమ్మలో "క చ ట త" అనే చదరం ఉంది. దీని ప్రతి భుజమూ పావలాకాసు చుట్టుకొలతకు సమానం. "క" దగ్గర చదరం మీద పావలాకాసు అంచుమీద నిలుచోబెట్టి, నాలుగు భుజముల వెంట జారిపోకుండా

దొర్లించుకుంటూ వెళ్ళి, మళ్ళీ బయలుదేరిన చోటికే వచ్చేసరికి, ఆ నాణెం తన చుట్టూ తాను ఎన్నిసార్లు తిరుగుతుంది?

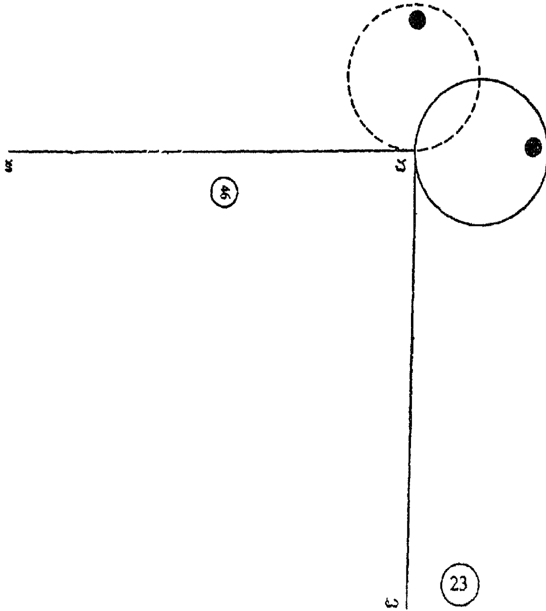
ఈ గమ్మత్తుల వెనుక దాగిఉన్న అసలు రహస్యం ఇందులో సరిగ్గా అర్థం అవుతుంది.




'క' నుంచి 'చ' వరకూ మాత్రమే ప్రయాణం వేసి ఆ నాణెం ఒక్క ఆత్మ ప్రదక్షిణం పూర్తిచేస్తుంది. 'చ' దగ్గరకు వచ్చాక, 'చ ట' అనే భుజంమీదికి మారడానికి ఆ నాణెం $90^\circ$ కోణం తిరగాలి అనే విషయం గుర్తుంచుకోవాలి.

ఇదిగో ఈ $90^\circ$ కోణం అదనంగా తిరగడం అనే పని చదరం తాలూకు, నాలుగు మూలల్లోనూ ఒక్కొక్కసారి జరుగుతుంది. కనుక మొత్తం $4 \times 90 = 360$ డిగ్రీల కోణం అదనంగా తిరుగుతుంది. $360^\circ$ డిగ్రీల కోణం తిరగడమంటే నాణెం తనచుట్టూ తాను ఒకసారి పూర్తిచుట్టు తిరగడం

అన్న మాట. కనుక చదరం తాలూకు నాలుగు భుజముల మీద నాలుగుసార్లు, నాలుగు మూలల్లోనూ కలిసి ఒకసారి, మొత్తం 5 సార్లు ఆ నాణెం తన చుట్టూ తాను తిరుగుతుంది.



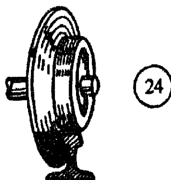

ఇది అర్థం అయితే స్థిరంగా ఉన్న పావలాచుట్టు తిరిగివచ్చిన రెండవ నాణెం తన చుట్టు తాను రెండుసార్లు ఎందుకు తిరిగిందో అర్థం అవుతుంది. చదరం చుట్టూ తిరగడంలో మూలం దగ్గర హఠాత్తుగా 90° కోణం అదనంగా తిరగవలసి వచ్చింది కానీ, గుండ్రని నాణెంచుట్టూ అయితే హఠాత్తుగా తిరగడం కాక, నెమ్మదిగా దారి అంతటా సహజంగా తిరుగుతుంది. కనుక మన దృష్టిని ఆకర్షించదు.

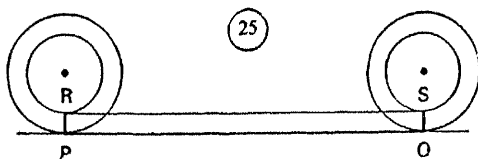
ఇదీ భేదం.

* * *

# 20. జంట చక్రాలు

ఒక పెద్ద చక్రాన్ని, ఒక చిన్న చక్రాన్నీ 24 వ బొమ్మలో చూపినట్లు కేంద్రముల దగ్గర అంటకలిపేరు. ఇవి "ఏక కేంద్ర చక్రములు" అన్నమాట. ఇటువంటి జంట చక్రాలను మీరు చూసే ఉంటారు. ఇప్పుడు వీటితో ఒక గమ్మత్తు చూపిస్తాను.




25 వ బొమ్మలో చూపినట్లు ఈ చక్రాల జంటను నేలమీద దొర్లిద్దాం. పెద్ద చక్రం నేలమీద జారిపోకుండా తిన్నగా ఒక చుట్టు తిరిగింది అనుకుందాం. అది ఎదరకు జరిగే దూరం దాని చుట్టుకొలతకి సమానంగా ఉంటుంది. 25 వ బొమ్మలో PQ అనే దూరం పెద్ద చక్రపు చుట్టుకొలతకి సమానం.

పెద్ద చక్రానికి అంటగలిపి ఉండడంచేత చిన్న చక్రం కూడా సరిగ్గా అదే వ్యవధిలో తన చుట్టూ తాను ఒకసారి తిరుగుతుంది కదా? కనుక చిన్న చక్రం ఎదరకు జరిగిన దూరం ( అంటే RS ) దాని పరిధికి సమానం అవాలికదా !

కాని PQ=RS

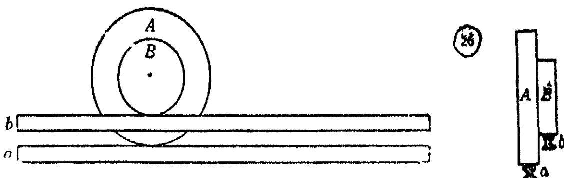
అంటే ఆ రెండు చక్రాల చుట్టుకొలతలూ సరిగ్గా సమానం అన్నమాట!

ఇదేమి విచిత్రం? ఆ చక్రాల జంటలో ఒకటి పెద్దది అనీ, ఒకటి చిన్నది అనీ ముందరే చెప్పుకున్నాం కదా? మరి ఇప్పుడు అవి రెండూ సమానం అనే విపరీతార్థం వస్తోంది ఏమిటి ?

17 వ శతాబ్దంలో ఈ సమస్య చాలా మందిని కలవరపరిచింది. మీరు ఈ చిక్కును విడదీయగలరేమో చూడండి.

జ వా బు :

పెద్ద చక్రం (25 వ బొమ్మలో) PQ అనే సరళ రేఖమీద జారిపోకుండా (SLIP అవకుండా) తిరుగుతుంది. కాని చిన్న చక్రం RS అనే సరళరేఖ మీద




జారిపోకుండా తిరగడం సాధ్యంకాదు; తప్పకుండా జారిపోతుంది. కనుక RS అనే దూరం చిన్న చక్రపు చుట్టుకొలతకి సమానం కాదు.

ఈ విషయం స్పష్టంగా అర్థం అవడానికి 26 వ బొమ్మలోలాగ బద్దీలు వేద్దాం.

a, b అనే రెండు బద్దీలను - ఒకటి క్రింద మరొకటి పైనా అమర్చుదాం. A అనే పెద్దచక్రం, దానికి ఏక కేంద్రకంగా అమర్చిన B అనే చిన్న చక్రం ఉన్నాయి. ఈ జంట చక్రాలను జంటబద్దీల మీద ఉంచితే పెద్ద చక్రం a అనే బద్దీకి తగులుతూ ఉన్నదనీ, చిన్న చక్రం b అనే బద్దీకి తగిలీ తగల కుండా ఉన్నదనీ అనుకుందాం. అప్పుడు ఆ చక్రాల జంట ఒక చుట్టు తిరిగే సరికి పెద్ద చక్రపు చుట్టుకొలతకు సమానమైన దూరం ఎదరకు జరుగుతుంది.

తరవాత చిన్న చక్రం b అనే బద్దీమీద బాగా ఆనుకుని ఉన్నదనీ, పెద్ద చక్రం a అనే బద్దీకి తగిలీ తగలకుండా ఉన్నదనీ అనుకుందాం. ఇప్పుడు ఆ చక్రాల జంట ఒక చుట్టు తిరిగితే చిన్న చక్రపు చుట్టుకొలతకు సమానమైన దూరం ఎదరకు జరుగుతుంది.

అంటే- పెద్ద చక్రం జారిపోకుండా తిరిగితే చిన్న చక్రం జారిపోక తప్పదు. అల్లాగే చిన్న చక్రం జారిపోకుండా తిరిగితే పెద్దచక్రం జారిపోక తప్పదు.

మామూలు చక్రాలకు బదులు A, B అనేవి పళ్ళచక్రాలు అనీ అవి నడిచే a, b అనే బద్దీలు ఈ చక్రాల పళ్లు సరిగ్గా దూరేటందుకు వీలుగా తయారు చేయబడ్డవి అనీ అనుకుందాం. చిన్న చక్రం b మీద, పెద్ద చక్రం a మీద పూర్తిగా అనుకుని ఉన్నాయి అనుకుందాం. ఇప్పుడు ఈ పళ్ళచక్రాలు జారిపోవడానికి వీలే లేదు కనుక ఈ చక్రాల జంటను కదిలించడం సాధ్యమే కాదు.

వంపు తిరిగిన రైలుపట్టాల మీద రైలుబండి నడుస్తున్నప్పుడు కూడా ఇంచుమించుగా ఇదే పరిస్థితి తారసపడుతుంది. వక్రమార్గ కేంద్రానికి దగ్గరగా ఉన్న బద్దీకన్న దూరంగా ఉన్న బద్దీ పొడవు అధికంగా ఉండడం సహజం. కాని, రైలుచక్రాలు ఒకే సైజులో ఉండడం చేత ఒక చుట్టు తిరిగేసరికి లోపలి చక్రాలు, వెలుపలి చక్రాలూ కూడా సమాన దూరాలే ప్రయాణం చేస్తాయి. ఈ భేదాన్ని కప్పుకోవడం కోసం వెలుపలి చక్రం బద్దీమీద సరిగ్గా అనుకుని స్లిప్ అవకుండా తిరుగుతుంది; లోపలి చక్రం స్లిప్ అవుతుంది.

* * *

# 21. రోకళ్ల ఉపయోగం

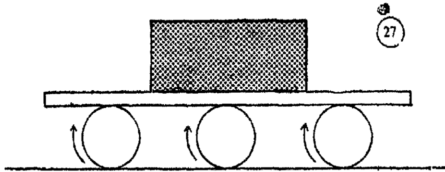
"ఒక్కో ఓ చెలియా! రెండూ రోకళ్ళూ" అని పాడుకుంటూ ధాన్యము, పసుపు వగైరాలు దంపుకోడానికి రోకళ్ళు అనాదిగా ఉపయోగపడుతున్నాయి. సిలిండరు ఆకారంలో ఉండి, నున్నగా, తగినంత బరువుగా ఉండడం ఈ పనికి అవసరం.

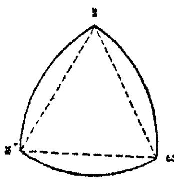
"ప్రత్యక్షం అవుతావా? రోకలితో పొడవమంటావా?" అని బెదిరించి వెనుకటి కొక పరమ శివభక్తుడు శివుణ్ణి ప్రత్యక్షం చేసుకున్న కథ శివ పురాణంలో ఉంది. "నాచేతన్ రోకట నిన్ను మొత్తవెరతున్ చీకాకు నా భక్తి, ఏ రీతిన్ నాకిక నిన్ను జూడగలుగున్? శ్రీకాళహస్తీశ్వరా!" అని ధూర్జటి చమత్కరించాడు.

రోకళ్ళ ఉపయోగాలలో దీనిని కూడా చేర్చవచ్చునేమో కదూ?

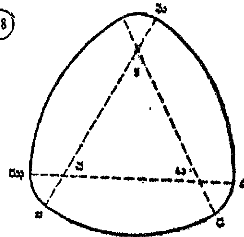
చాలా బరువైన సామాను ఒకచోటినుంచీ మరోచోటికి తరలించడానికి రోకళ్ళను నేలమీద ఒకదానికొకటి సమాంతరంగా ఉంచి, వాటిమీద బల్లకి చెక్క పరిచి, దానిమీద బరువైన సామాను ఉంచి సులభంగా దొర్లించవచ్చు.

ఈ పనికోసం ఉపయోగించిన రోకలి చుట్టుకొలత ఒక అడుగు అనుకుందాం. ఆ రోకలి తన చుట్టూ తాను ఒకసారి తిరిగేసరికి బల్లచెక్కమీది వస్తువు ఎంత దూరం ఎదరకి జరుగుతుందో చెప్పగల్గరా?



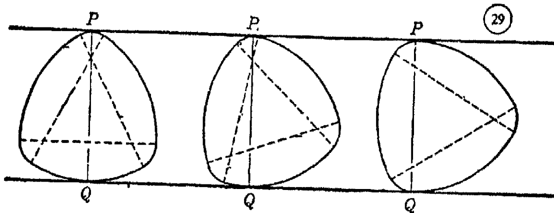


(a)



(b)

ఒక అడుగు దూరం అని మీ సమాధానమైతే అది తప్పు. నిజానికి రెండు అడుగులు ఎదరికి జరుగుతుంది. ఎల్లాగో తెలుసా?




**జవాబు :**

జరుపవలసిన వస్తువుయొక్క కదలికను సౌలభ్యం కోసం రెండు భాగాలుగా విడదీద్దాం. మాటవరసకి, రోకళ్ళు నేలకి తగలకుండా పైకి ఎత్తి ఉంచి, అదిమాత్రం ఎదరికి జరగకుండా ఇరుసుల (Longitudinal Axes)

మీద గిరగిరా తిరుగుతున్నాయి అనుకుందాం. ఈ విధంగా రోకళ్లు ఒక చుట్టు తిరిగితే, వాటిపైనున్న వస్తువు ఒక అడుగు ఎదరకు జరుగుతుంది కదా?

తరవాత రోకళ్ళు నేలమీద ఉన్నాయనీ, వాటిమీద బల్లచెక్కగానీ బరువుగానీ లేదు అనుకుందాం; ఈ స్థితిలో రోకళ్ళు ఒక చుట్టు తిరిగితే అవి ఎదరకు ఒక అడుగు జరుగుతాయికదా!

ఇప్పుడు ఈ రెండు రకాల చలనములనూ కలుపుదాం. రోకళ్ళు నేలమీద ఒక చుట్టు తిరిగితే, వాటిమీద ఉన్న వస్తువు రెండు అడుగులు ఎదరకు జరగడంలో ఆశ్చర్యం ఏముంది?

## సిలిండరు తప్ప పనికిరాదా?

బరువైన వస్తువులను కదపడానికి యీ విధంగా గుండ్రని అడ్డకోత (Cross section) కలిగిన రోకళ్ళ వంటి వస్తువులనే ఉపయోగించడం ఎందుకంటే - నేలకీ, బరువు వస్తువుకీ మధ్యగల దూరం హెచ్చుతగ్గులు లేకుండా స్థిరంగా ఉండడానికీ, త్వరగా దొర్లడానికీనూ. దీనినే మరో లాగ చెప్పాలంటే- తిరుగుతున్నప్పటికీ స్థిరమైన ఎత్తుకలిగిన ఆకృతి వృత్తం కనుకనూ.

అయితే, గిరగిరా తిరుగుతున్నప్పటికీ స్థిరమైన ఎత్తు కలిగిన ఆకృతులు వృత్తాలు తప్ప మరి ఏవీ లేవా?

"లేవు" అని చాలా మంది అనుకుంటూ ఉంటారు కానీ ఇటువంటి ధర్మం కలిగినవి ఇంకా ఉన్నాయి! ఇటువంటివి తయారుచేసి రోకళ్ళ స్థానే ఉపయోగించవచ్చును కూడా.

28 వ బొమ్మలో ఇటువంటి ఆకృతులు చూడవచ్చు. "క చ ట" అనే సమబాహు త్రిభుజాన్ని తీసుకో. ఒక్కొక్క భుజం పొడవు R అనుకో. "క" కేంద్రంగానూ, R వ్యాసార్థంగానూ తీసుకుని "చట" అనే చాపం గీయి. తరువాత ట కేంద్రంగానూ, R వ్యాసార్థంగానూ తీసుకుని కచ అనే చాపం గీయి. తరువాత చ కేంద్రంగానూ, R వ్యాసార్థంగానూ తీసుకుని కట అనే చాపం గీయి. 2 వ బొమ్మలో a అనే ఆకృతి వస్తుంది. ఇదే మనకు కావలసిన ఆకారం.

క, చ, ట అనే మూలలలో నున్నగా ఉండి, సులభంగా దొర్లాలంటే b అనే బొమ్మలో చూపినట్లు భుజములను పొడిగించాలి. పొడిగించిన దూరం S అనుకో. ఈ బొమ్మలో గ ఘ ద ధ, జ ఝ, అనే చాపములు క, ట, చలు కేంద్రములుగానూ, S వ్యాసార్థముగానూ గీయబడ్డాయి. జధ, దఘ, గ ఘ అనే పెద్ద చాపములు క, చ, ట లు కేంద్రములుగానూ, R+S వ్యాసార్థముగానూ గీయబడ్డాయి.

ఇటువంటి అడ్డకోత కలిగిన రోకళ్ళను తయారుచేసి, మామూలు గుండ్రని రోకళ్ళకు బదులుగా బరువులు జరపడానికి ఉపయోగించ వచ్చు. 29 వ బొమ్మలో చూపించినట్లు. అప్పుడు ఈ రోకళ్ళు ఏ విధంగా దొర్లినప్పటికీ నేలకీ, ఈ రోకళ్ళ మీద పెట్టిన బరువులకీ మధ్య దూరం స్థిరంగా ఉంటుంది. ఆ దూరం $= PQ = R + S$.

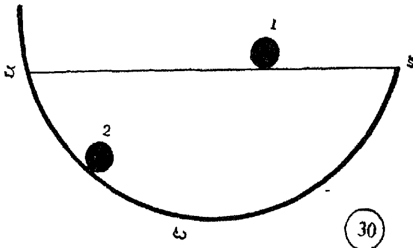
అయితే, ఈ ఆకారంలో నిర్మించిన చక్రాలను బండి చక్రాలుగా ఉపయోగించ వచ్చునా?

ఉహూఁ. వీలుకాదు. ఏమంటే, వృత్తంలో కేంద్ర బిందువు ఉంటుంది. ఆ బిందువునుంచి పరిధి మీది అన్ని బిందువులూ సమానదూరంలో ఉంటాయి. అటువంటి సౌష్టవం (Symmetry) ఈ ఆకృతికి లేదు. కనుక, ఇరుసు దూర్చ దగ్గ కేంద్ర బిందువు ఏదీ ఇందులో లేదు.

* * *

# 22. దగ్గర దారి

ఇక్కడి 30 వ బొమ్మలో చూపినది బూరెలమూకుడు వంటి పాత్ర తాలూకు అడుగు భాగం. దానినే "క చ ట" అనే వంపుతో సూచించాను. ఈ పాత్రలో "క చ ట" అనే బల్లచెక్క వాలుగా అమర్చబడి ఉంది.




సమానమైన రెండు ఇనుపగుళ్ళు తీసుకుని ఒకటి వాలుబల్ల మీద "క" అనేచోట వదిలిపెట్టేరు. రెండవగుండు "క ట చ" అనే వంపుదారి మీదుగా దొర్లుకుంటూ వెళ్ళి "చ" అనే బిందువును చేరుకుంది.

ఇప్పుడు మన సమస్య ఏమిటంటే - ఏక సమయంలో "క" దగ్గర వదిలి పెట్టిన రెండు గుళ్ళలో ఏది ముందుగా "చ" ను చేరుకుంటుంది.

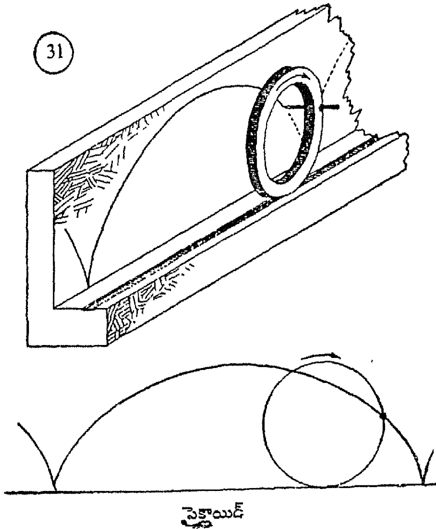
జవాబు :

వంపు దారివెంట ప్రయాణం చేసిన రెండవ గుండే పందెంలో నెగ్గుతుంది.

''కటచ'' అనే వంపుదారి - ''కచ'' అనే ఋజు మార్గం కన్న ఎక్కువ పొడువుగా ఉన్నాసరే, వంపుదారిలో ''టచ''ల మధ్యని ఎత్తు ఎక్కువలనీ వచ్చినా సరే - రెండవ గుండే ముందుగా అడంగు చేరుతుంటుంది!

ఈ సమస్యను 1696 లో జాకబ్ బెర్నౌలీ అనే గణిత శాస్త్రజ్ఞుడు తన సోదరుడైన జోహినెస్ బెర్నౌలీకి ప్రతిపాదించాడట. బెర్నౌలీ వంశం గణిత శాస్త్రజ్ఞులకు పెట్టినది పేరు. మూడు తరాలలో ఎనమండుగురు శాస్త్రజ్ఞులు పుట్టి, గణితశాస్త్రాన్ని సంపన్నం చేశారు ఇప్పటికీ ఆ వంశ నామం గణిత భౌతిక శాస్త్రాలలో వినిపిస్తూ ఉంటుంది.

''క ట చ'' అనే వక్రరేఖకు గణితశాస్త్రంలో ప్రత్యేకమైన పేరు ఉంది. దీనిని ''సైక్లాయిడ్'' (cycloid) అంటారు. దీనిని చాలా సులభంగా గీయవచ్చు. (బొమ్మ 31.)




సైక్లాయిడ్

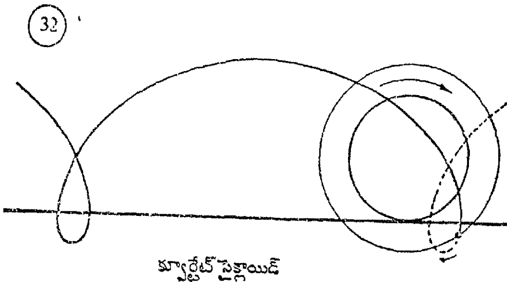
ఏదో ఒక గుండ్రని బిళ్ళను - ఉదాహరణకి ఒక రూపాయి కాసును తీసుకో. దాని అంచుమీద ఎక్కడో ఒకచోట రంగు పెనిసిలుతో ఒక చుక్క

పెట్టు. ఇప్పుడు ఆ బిళ్ళను అంచుమీద దొర్లిస్తూ, ఆ చుక్క నడిచేదారిని రికార్డు చేస్తూపోతే అదే సైక్లాయిడ్ అవుతుంది.

ఏ రెండు బిందువుల మధ్యనైనా సరే- అత్యల్ప కాలంలో ప్రయాణం చేయదగ్గదారి సైక్లాయిడ్ కన్న తక్కువ వ్యవధిలో అడంగును చేరుకోవడం సాధ్యం కాదు.

సైక్లాయిడు వక్రరేఖలలోనే "క్యూర్టేట్ సైక్లాయిడ్" అనే ప్రత్యేక వక్ర రేఖ ఒకటి ఉంది.

గుండ్రని బిళ్ళకు బయట ఒక చుక్కను గుర్తుగా పెట్టుకుని ఆ బిళ్ళను అంచుమీద దొర్లిస్తే ఆ చుక్క నడిచే మార్గమే క్యూర్టేట్ సైక్లాయిడు అవుతుంది. (బొమ్మ. 32.)




క్యూర్టేట్ సైక్లాయిడ్

గుండ్రని బిళ్ళకు బయట చుక్క పెట్టడం ఎల్లాగంటారా? బిళ్ళ బయటికి పొడుచుకు వచ్చేలాగ ఒక పుల్లను అతికించి, దానికొసనే మనకు కావలసిన చుక్కగా గుర్తు పెట్టుకోవచ్చు. ఆ బిందువు నడిచే మార్గాన్నే 32వ బొమ్మలో చూపించాను. ఇందులో ప్రత్యేకత ఏమిటంటే చక్రం కుడివైపుకి దొర్లుతూ ఉంటే - ఆ చక్రపు అంచుకి వెలుపల గుర్తు పెట్టుకున్న బిందువు ఒక్కొక్క సమయంలో వెనుకకు కదులుతూ ఉంటుంది.

ఇటువంటి పరిస్థితే రైలు చక్రాలలో కనిపిస్తుంది. చక్రం రైలు బద్దీ మీద దొర్లుతూ ఉంటే చక్రపు అంచునుంచి బయటికి పొడుచుకు వచ్చిన ఫ్లాంజ్ (Flauge) మీది ప్రతిబిందువూ పైన వర్ణించిన క్యూర్టేట్ సైక్లాయిడ్ మార్గంలో కదులుతూ ఉంటుంది. కనుక రైలు ముందుకి వెడుతూ ఉంటే అదే రైలులో

ఏదో ఒక భాగం ఎల్లప్పుడూ వెనుకకి కదులుతూ ఉంటుంది అంటే తప్పు కాదుకదూ!

* * *

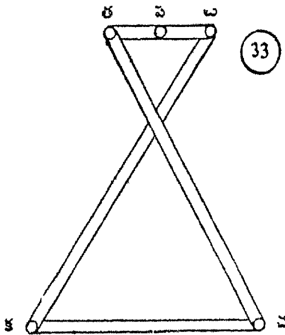
# 23. రూలరు లేకుండా సరళరేఖ గీయడం

సరళ రేఖను గీయాలంటే అడుగుబద్దనో, రూళ్ళకర్రనో తీసుకుని, దాని అంచు వెంబడి తిన్నగా గీసుకుంటూ పోతాం. అంటే- సరళరేఖను గీయడానికి సరళంగా ఉండే వస్తువునే ఉపయోగిస్తామన్నమాట. సరళంగాలేని వస్తువులను ఉపయోగించి సరళరేఖను గీయడం సాధ్యం కాదా ?

ఇది చాలా చిత్రమైన ప్రశ్న.

వృత్తాన్ని గీయడానికి గుండ్రంగా ఉన్న డబ్బా మూతనో, గ్లాసు అంచునో వెతుక్కుంటామా? వృత్తలేఖిని అనే పనిముట్టును ఉపయోగిస్తాం. వృత్తలేఖిని గుండ్రంగా ఉండదుకదా ? అంటే వృత్తం గీయడానికి వర్తులంగా ఉండే వస్తువులనే ఉపయోగించవలసిన అవసరం లేదు. సరళరేఖను గీయడానికీ, వృత్తాన్ని గీయడానికీ మనం వాడే పనిముట్లు పూర్తిగా విలక్షణమైనవన్నమాట.

వృత్తాన్ని గీయడానికి వర్తాకారంలో లేని వృస్తువును ఉపయోగించగలిగినప్పుడు, సరళంగాలేని వస్తువును ఉపయోగించి సరళరేఖను గీయడం సాధ్యం కాదా ?




33

చిత్రమైన ఈ సమస్యను సాధించడానికి త్చేబిషెవ్ (1821 - 1894) అనే రష్యన్ గణిత శాస్త్రజ్ఞుడు పూనుకున్నాడు. ఈ పనికై బద్దలవంటి నాలుగు కర్రముక్కలను తీసుకున్నాడు. ఈ బద్దల చివరల పెద్ద కన్నాలు పొడిచి, 33 వ బొమ్మలో చూపినట్లు అమర్చాడు.

ఈ కర్రబద్దల పొడవులు (రంధ్రముల మధ్య దూరాలు) ఈ క్రింది విధంగా ఉండాలి.

కట = చత = 13 అంగుళాలు

కచ = 10 అంగుళాలు

తట = 4 అంగుళాలు

ఈ విధంగా అమర్చి క, చ, ట, త అనే రంధ్రాలలో నుంచి సన్నని తీగను దూర్చి, వదులుగా ముడివేశాడు. అంటే చట్రం అంతా సులభంగా అటూ ఇటూ కదలగలదన్నమాట. "తట"కు సరిగ్గా మధ్యలో "ప" అనేచోట రంధ్రం పొడవాలి.

"కచ" అనే కర్రబద్దను కదలకుండా నొక్కిపట్టి, "ప" అనే రంధ్రంలో పెనిసిలు మొన దూర్చి అటూ ఇటూ జరిపితే (ఇంచుమించుగా) సరళరేఖను గీస్తుంది!

అయితే, సరళరేఖను గీయడానికి సరళంగా ఉన్న బద్దలనే వాడి తీరా లన్న నియమం ఏమీలేదు. వంకర టింకరగా ఉన్న ఇనుప బద్దీలనే వాడినా అభ్యంతరం లేదు. కానీ ముఖ్యంగా గుర్తుంచుకోవలసిన విషయం ఏమిటంటే- రంధ్రాల మధ్య దూరాలు 12 : 10 : 4 నిష్పత్తిలో ఉండాలి.

ఈ నిష్పత్తి సరిపోతే చట్రం ఏ ఆకారంలో ఉన్నా సరే- సరళరేఖలను గీయగలదు.

ఇంతకుముందే సూచించినట్లు ఈ పనిముట్టు అచ్చంగా సరళరేఖలను గీయలేదు, సుమారుగా సరళ రేఖలను మాత్రమే గీస్తుంది- అంతే.

దీనిని పాసీలియర్ అనే ఫ్రెంచి ఇంజనీరు అభివృద్ధి చేసి, ఖచ్చితంగా సరళ రేఖలను గీయగల పనిముట్టును తయారుచేశాడు. ఇది 34 వ బొమ్మలో చూపినట్లు ఉంటుంది.

ఇతడు 7 బద్దీలను ఉపయోగించాడు. ఇందులో 4 బద్దీలు సరిసమాన మైన పొడవులు గలవి. వీటిని "క గ చ జ" అనే డైమను ఆకారం (**Rhombus**) లో అమర్చాడు. వీటికన్న పొడుగ్గా ఉండే (సరిసమానమైన పొడవులుగల) కట, చట అనే రెండు బద్దీలను ఈ డైమను ఆకారానికి అంట గట్టేడు.

"జట" అనే పొడవులో సరిగ్గా సగం పొడవుగల "జద" అనే మరో బద్దీని "జ" అనే బిందువు దగ్గర తగిలించాడు- 34 వ బొమ్మలో చూపించినట్లు.

"ట", "ద" అనే బిందువులను కదలకుండా స్థిరంగా డ్రాయింగు పిన్నులతో పట్టి ఉంచి, "గ" అనే బిందువు దగ్గర రంధ్రంలో పెనిసిలు మొన

దూర్చి, అటూ ఇటూ కదిలిస్తే అచ్చమైన సరళరేఖను గీస్తుంది!

ఈ పనిముట్టు గీసేది సరళరేఖే అని క్షేత్ర గణిత సూత్రాలను ఉపయోగించి రుజూవు చేయవచ్చు.

* * *

# 24. నక్షత్రంలో విచిత్రం

35 వ బొమ్మలో 5 కోణాల నక్షత్రం ఒకటి చూపబడింది. ఇందులో గీతలు కలుసుకున్న పది చోట్లా పది సున్నలున్నాయి. గుర్తుకోసం వాటికి క - చ - ట - త - ప - గ - జ - డ - ద - బ అని పేర్లు పెట్టేం.

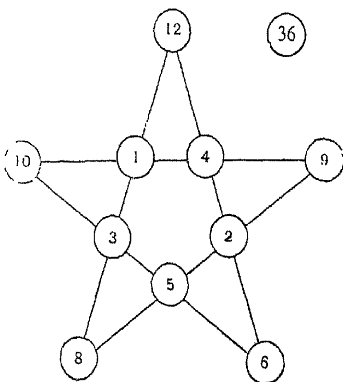
ఇప్పుడు చేయవలసిన దేమిటంటే - ఈ పది సున్నలలోనూ వేరు వేరు సంఖ్యలు వ్రాసి, ఏ గీతమీది నాలుగు సంఖ్యలు కూడినా ఒకే మొత్తం వచ్చే

టట్లు చెయ్యాలి. ఏ మొత్తమైనా రావచ్చు. ఏ సంఖ్యలైనా వాడవచ్చు. దీనినే మరోలా చెప్పాలంటే-

(జ + ప + క + ద) = (ద + చ + ట + గ)
= (గ + త + ప + డ) = (డ + క + చ + బ)
= (బ + ట + త + జ)

అయి ఉండేటట్లు పది సున్నలలోనూ వేరు వేరు సంఖ్యలు వ్రాయాలి. ఇది ఎలా సాధ్యం?

ఈ సమస్యకు జవాబులు అనంతంగా ఉంటాయి. పది సున్నలలోనూ పది వరుస సంఖ్యలు ఉపయోగించి సమస్యను సాధించడం అసాధ్యం. ఈ మొత్తం 24 కన్న చిన్నది అవడం కూడా అసాధ్యమే. ఉదాహరణకి: ఏ వరుస కూడినా మొత్తం = 24 రావాలని సమస్య




ఇచ్చారనుకుందాం. ముందర సాధ్యమైనంత చిన్న చిన్న వేరు వేరు అంకెలు మీకు తోచినవి నక్షత్రం మధ్యలోవున్న పంచభుజిలో (క, చ, ట, త, ప) వ్రాయి.

1, 4, 2, 5, 3 అనే అంకెలను పంచభుజిలో 36 వ బొమ్మలో చూపినట్లు వ్రాద్దాం. (ఈ క్రమంలో వ్రాయడానికి కారణం ఉంది, తరవాత చెప్తాను.)

ఇంక కోణాల దగ్గర వ్రాయవలసిన అంకెలను (గ, జ, డ, ద, బ) నిర్ణయించాలి. దీనికొక సూత్రం ఉంది:

$$ద = \frac{\text{మొత్తము}}{2} + త - (క + చ)$$

$$బ = \frac{\text{మొత్తము}}{2} + క - (త + బ)$$

$$గ = \frac{\text{మొత్తము}}{2} + క - (త + ట)$$

$$జ = \frac{\text{మొత్తము}}{2} + చ - (ప + త)$$

$$డ = \frac{\text{మొత్తము}}{2} + ట - (క + ప)$$

మొత్తంలో సగానికి, ఆ కోణపు ఎదుటి సున్నలోని అంకెను కలిపి, అందులోనుంచి ఆ కోణానికి అత్యంత సమీపంలో ఉన్న రెండు అంకెల మొత్తాన్ని తీసివేస్తే, ఆ కోణందగ్గర ఉండవలసిన అంకె వస్తుంది.

ఈ సూత్రాన్ని ఉపయోగిస్తే :

$$గ = \frac{24}{2} + 1 - (2 + 5) = 6$$

$$జ = \frac{24}{2} + 4 - (3 + 5) = 8$$

$$డ = \frac{24}{2} + 2 - (1 + 3) = 10$$

$$ద = \frac{24}{2} + 5 - (1 + 4) = 12$$

$$బ = \frac{24}{2} + 3 - (4 + 2) = 9$$

ఈ విధంగా పది సున్నలలోని అంకెలూ తెలిశాయి. (చూడు. 36 వ బొమ్మ).

ఈ సూత్రాన్ని ఉపయోగించి ఎటుకూడినా నీకు తోచిన మొత్తం వచ్చేటట్లు చేయవచ్చు. పంచభుజిలోని సున్నలలో నీకు తోచిన అంకెలు వేయవచ్చు. కాని అన్ని సున్నలలోనూ వేరువేరు అంకెలు అన్నప్పుడూ సాధ్యం కాకపోవచ్చు. వేసిన అంకే మళ్లీ రావచ్చు. ఒక్కొక్కప్పుడు ఋణసంఖ్యలు వాడవలసి రావచ్చు. అన్నీ వేరు వేరు ధనసంఖ్యలు మాత్రమే ఉండాలనే నియమం ఉన్నట్లయితే పంచభుజిలో వేయవలసిన సంఖ్యలను జాగ్రత్తగా ఎన్నుకోవాలి. సరిగ్గా రాకపోతే మార్చి మరో సంఖ్యను వాడి చూడాలి.

36 వ బొమ్మలోని పంచభుజిలో 1, 4, 2, 5, 3 అనే వరుసలో అంకెలను వ్రాయడానికి కారణం తరువాత చెబుతాను అన్నాను కదూ?

క, చ, ట, త, ప లు 1, 2, 3, 4, 5 అనే వరుసలో అంకెలు వేస్తే ఏమవుతుందో చూద్దాం.

పైన చెప్పిన సూత్రాన్ని ఉపయోగించి, కోణముల దగ్గర ఉండవలసిన అంకెలను లెక్క పెడితే ద=13; బ=12: గ=6; జ=5; డ=9 వస్తాయి. ఏ వరుస కూడినా మొత్తం 24 వస్తుంది. నిజమేకానీ, ప, జ అనే సున్నలు రెండిటిలోనూ 5 ను రెండుసార్లు ఉపయోగించవలసి వచ్చింది. వాడిన అంకెను మళ్ళీ వాడకూడదనే నియమం ఉంది కనుక, ఈ సొల్యూషన్ పనికిరాదు. అంటే పంచ భుజిలోని క, చ, ట, త, ప లకు వరుసగా 1, 2, 3, 4, 5 అనే విలువల నివ్వరాదు. ఈ క్రమాన్ని కొద్దిగా మార్చి మళ్ళీ ప్రయత్నిస్తే 36 వ బొమ్మలో చూపిన సొల్యూషను వచ్చింది.

మరొక ఉదాహరణ : ఎటుకూడినా మొత్తం 30 వచ్చేటట్లు వేరు వేరు ధన సంఖ్యలను వాడి నక్షత్రాన్ని పూరించాడం ఎల్లాగో చూపిస్తాను.

క=1; చ=2; ట=3; త=4; ప=5

గ=9; జ=8; డ=12; ద=16; బ=15

ఇది ఒక్కటేకాదు, దీనికి ఇంకా రకరకాల జవాబులు ఉన్నాయి.

ఉదాహరణకి :

క=2; చ=3; ట=4; త=5; ప=6

గ=8; జ=7; డ=11; ద=15; బ=14

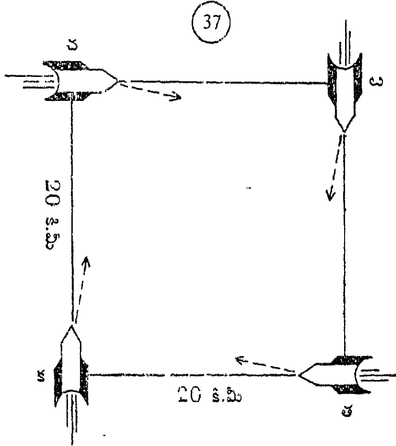
*        *        *

# 25. నాలుగు రాకెట్లు

20 కి. మీ. పొడవు, 20 కి. మీ. వెడల్పుగల చదరానికి నాలుగు మూలలలోనూ నాలుగు రాకెట్లు నిలిచి ఉన్నాయి బొమ్మలో చూపించినట్లు. వీటికి క-చ-ట-త అని పేర్లు పెడదాం.

విమానాలకు గానీ, ఇతర రాకెట్లనుగానీ - అవి ఎటు తిరిగినాసరే తాము కూడా అదే దిశలో తిరిగి వాటిని తరిమి తరిమి పడగొట్టగల "గైడెడ్ మిసైల్సు" ఇవి నాలుగూనూ. వీటిలో అమర్చిన ఎలక్ట్రానిక్ పరికరాలు తాము దెబ్బతీయవలసిన లక్ష్యంపై పే ఎల్లప్పుడూ వీటిని నడిపిస్తూ ఉంటాయి. వాసన పసికట్టిన వేటకుక్కలలాగ "శత్రువు" ఎన్ని వంపులు తిరిగినా సరే - ఇవి లక్ష్యాన్ని ఢీకొని తీరతాయి.

బొమ్మతో "క" అనే రాకెట్టు "చ" అనే రాకెట్టును గుద్దుకోవడానికి తిన్నగా "చ" కనిపిస్తున్న దిశలో వెడుతోంది. "చ" అనే రాకెట్టు "ట" అనే రాకెట్టును గుద్దుకోవడానికి వెడుతోంది. "ట" అనే రాకెట్టు "త" అనే రాకెట్టును, "త" అనే రాకెట్టు "క" అనే రాకెట్టునూ ఢీకొనడానికి వెడుతున్నాయి. వాటి




వేగాలు సెకనుకి 1 కి. మీ. అన్నీ ఏక సమయంలో బయలుదేరి ఒక దాని నొకటి తరుముకుంటూపోయి, ఆఖరికి అవి నాలుగూ ఒకచోట ఢీకొట్టుకుని భస్మమై పోయాయి.

ఇప్పుడు సమస్య ఏమిటంటే - బయలుదేరిన ఎంత సేపటికి అవి గుద్దుకుంటాయి?

జవాబు :

యూనివర్సిటీలో గణితాచార్యుణ్ణి ఎవరినైనా ఈ సమస్యకి జవాబు చెప్పమంటే-ఇది చాలా జటిలమైనసమస్య అంటాడు. ఆ రాకెట్లు ప్రయాణంచేసిన మార్గాలు కనుక్కోడానికి Differential Equations సాల్వ్ చేయాలంటాడు. ఇప్పుడు క్లాసుకి టైము అయిపోయింది. రేపు చెప్తాను అని కూడా అంటాడు.

నిజానికి ఇందులో అంత శ్రమపడి సాధించవలసిన దేమీలేదు. రాకెట్టు ప్రయాణం చేసిన మార్గాలు కనుక్కోవలసిన అవసరమూ లేదు.

మొదట ఆ నాలుగు రాకెట్లు ఒక చతురస్రానికి నాలుగు మూలలలోనూ ఉన్నాయి. ఏకసమయంలో అవి బయలుదేరేయి. ఆ తరువాత కూడా ఏ

క్షణంలో చూచినా అవి నాలుగూ ఒక చతురస్రంతాలూకు నాలుగుమూలలలోనూ ఉంటాయి. కాని, అయితే ఆ చతురస్రం అంతకంతకు చిన్నది అయిపోతూ ఉంటుంది. ఆఖరికి అవి అన్నీ ఒక బిందువులో కలుసుకుంటాయి. ఆ చతురస్రం కుంచించుకుపోయే వేగం రాకెట్టు వేగానికి సమానం. అంటే - సెకనుకి ఒక కి.మీ. వేగంతో కుంచించుకుంటుంది. కనుక 20 కి.మీ. పొడవుగల భుజం 20 సెకెనులలో పూర్తిగా కుంచించుకుంటుంది.

కనుక ఆ రాకెట్లు ఢీకొనడానికి పట్టేకాలం 20 సెకనులు.

* * *

# 26. పంతుళ్లకి సలహాలు

ఒక పల్లెటూరి వీధిబడిలో ఐదవ తరగతికి పాఠాలుచెప్పే పంతులుగారికి మధ్యాహ్న భోజనం అయాక కునికిపాట్లు వస్తున్నాయి. పిల్లలు అల్లరి చేయ కుండా ఉండేందుకని చిట్కా ప్రయోగించాడు.

"9734374916204 ని 6277348194 పెట్టి గుణించండ్రా! అల్లరి చేశారంటే వీపు చీరేస్తాను" అని గర్జించి, కుర్చీకి జేర్లబడి గురకతీయసాగేడు.

సుమారు రెండున్నర గంటల తరవాత క్లాసులో పిల్లలు లెక్కచేసిన పుస్తకాలు తీసుకువచ్చారు. కొండవీటిసీమ చేంతాడులంతేసి పొడుగున్న ఆ జవాబులు చూసేసరికి పంతులుగారికి చిరాకు పుట్టుకువచ్చింది. నిద్రమత్తులో తోచిన అంకెలు ఏవేవో ఇచ్చేశాడు కాని, వాటిని తప్పులు పోకుండా గుణించడం తనకు మాత్రం సాధ్యమా? "ప్రమాదో ధీమతా మపి" అన్నారు. మరి ఇప్పుడు క్లాసులో ఎవరెవరు లెక్క సరిగ్గా చేశారో, ఎవరెవరు తప్పు చేశారో తెలుసుకోవడం ఎల్లాగ? పోనీ, క్లాసులో ఉన్న పాతికమంది పిల్లలలోనూ ఎక్కువ మందికి వచ్చిన జవాబు రైటు అనీ, మిగిలిన వాళ్ళది తప్పు అనీ నిర్ణయించి, తప్పు చేసినవాళ్ళ మొణుకులమీద రూళ్ళకర్రతో రెండు రెండు చొప్పున వడ్డించేద్దాం అనుకున్నాడు.

కాని, తీరా చూస్తే పాతికమందిలోనూ ఇద్దరికి ఒక జవాబు, ఐదుగురికి ఒక జవాబు, ఆరుగురికి మరో జవాబు, మిగిలిన వారందరికీ తలో జవాబూ వచ్చాయి. ఇందులో ఎవరిది రైటు అనుకోవాలి? ఇప్పుడు ఏమిటి సాధనం?

పంతులుగారికి నిద్రమత్తు వదిలిపోయింది. అంతలో ఆపద్బాంధవుడిలా పక్క ఇంటి గోడగడియారం ఠాంగ్ ఠాంగ్‌మని ఐదు కొట్టింది.

"ఈ పూటకి ఇళ్ళకి పొండ్రా!" అని పంతులుగారు ఇంటిలోకి దారి తీశారు.

అదిగో సరిగ్గా అటువంటి పంతుళ్ళకి సాయం చెయ్యాలనే సదుద్దేశంతో ఈ వ్యాసం వ్రాస్తున్నాను.

కూడికలు, తీసివేతలు, గుణకారాలు, భాగహారాలు, వర్గములు, వర్గ మూలములు, ఘనములు, ఘనమూలములు - ఎంతెంత పెద్దవి అయినా సరే వచ్చిన జవాబు తప్పో, కాదో సునాయాసంగా చెప్పేసే పద్ధతి ఒకటి ఉంది.

ఈ చిట్కా తెలుసుకునే ముందు 'మూలాంకం' (Digital Root) అనే కొత్తమాట నేర్చుకోవాలి. తప్పదు మరి.

ఉదాహరణకి 917534 అనే సంఖ్య ఉన్నదనుకుందాం. ఇందులోని అంకెలన్నీ కూడితే : $9 + 1 + 7 + 5 + 3 + 4 = 29$ వస్తుంది. ఈ 29 లోని అంకెలను మళ్ళీ కూడితే $2 + 9 = 11$ వస్తుంది, మళ్ళీ 11 లోని అంకెలను కూడితే $1 + 1 = 2$ వస్తుంది.

ఇదిగో ఈ 2 ని 917534 యొక్క మూలాంకం అంటాను.

ఏ సంఖ్యకీ కూడా మూలాంకం సున్న ఉండదు. 1 నుంచి 9 వరకూగల తొమ్మిది అంకెలే మూలాంకములు. లెక్కచేయవలసిన అసలు సంఖ్యలకి బదులుగా వాటి మూలాంకములు ఉపయోగించి అదే లెక్కచేసి చూడాలి.

ఉదాహరణకి మన పంతులుగారు ఇచ్చిన గుణకారంలో మొదటి సంఖ్యకి మూలాంకం=5: రెండవసంఖ్యకి మూలాంకం=6. ఈ రెండు మూలాంకములనూ గుణిస్తే $6 \times 5 = 30$ వస్తుంది లేదా $3 + 0 = 3$ వస్తుంది కనుక అసలు సంఖ్యలను గుణించగా వచ్చిన లబ్ధంయొక్క మూలాంకం 3 అయి ఉంటుంది. వచ్చిన జవాబు యొక్క మూలాంకం 3 కి సమానం కాకపోతే లెక్క తప్పు అన్నమాట!

ఇక్కడ ఒక ముఖ్యమైన విషయం గుర్తుంచుకోవాలి. జవాబుయొక్క మూలాంకం సరిగ్గా లేకపోతే జవాబు తప్పు అని ఢంకామీద దెబ్బకొట్టి చెప్ప వచ్చును కానీ, మూలాంకం సరిపోయినంత మాత్రాన జవాబు రైటు అనడానికి వీలులేదు. ఏమంటే; 420 కి, 402 కి, 240 కి, 24 కి 42 కి కూడా మూలాంకం ఆరే, కాని ఆ సంఖ్యలు అన్నీ వేరు వేరు కదా!

ఇల్లాగే అన్నిరకాల లెక్కలకూ మూలాంకాలు సరిగ్గా లేకపోతే జవాబు తప్పు అని సులభంగా చెప్పవచ్చు. ఒక్కొక్కరకపు లెక్కకు ఒక్కొక్క ఉదాహరణ చూద్దాం.

కూడిక : $474 + 691 = 1065$ అని వచ్చింది అనుకుందాం.

474 యొక్క మూలాంకం=6

691 యొక్క మూలాంకం=7

$\therefore$ 6 + 7 = 13 లేక 1 + 3 = 4 వస్తుంది కాని వచ్చిన జవాబు (1065) కి మూలాంకం = 3. రావలసిన మూలాంకం 4 అయితే, 3 వచ్చింది కనుక ఈ జవాబు తప్పు.

తీసివేత : 903 – 376 = 427 వచ్చిందనుకో.

903 యొక్క మూలాంకం = 3

376 యొక్క మూలాంకం = 7

3 నుంచి 7 తీసివేయలేము కనుక 9 అప్పు పుచ్చుకోవాలి. (మనం మామూలుగా చేసే లెక్కలలో 10 అప్పు పుచ్చుకున్నట్లే ఇక్కడ 9 అప్పు పుచ్చుకోవాలి.)

9 + 3 = 12

12 – 7 = 5 మూలాంకంగా రావాలి. కాని.

427 కి మూలాంకం = 4

కనుక జవాబు తప్పు.

భాగహారం :

73091ని 74చే భాగించగా

987 విభక్త వచ్చి, 43 శేషం మిగిలింది. ఈ లెక్క తప్పా?

విభాజ్యం (73091) కి మూలాంకం = 2

విభాజకం (74) కి మూలాంకం = 2

విభక్తం (987) కి మూలాంకం = 6

శేషం (43) కి మూలాంకం = 7

విభాజ్యము = (విభాజకము × విభక్తము) + శేషం అని మనకు తెలుసు.

మూలాంకములను ఉపయోగించి ఈ సమీకరణం సరిపోయిందో లేదో చూద్దాం.

(2×6) + 7 = 12 + 7 = 19 లేక 1 + 9 = 10 = 1 మూలాంకం.

ఇది విభాజ్యపు మూలాంకం (2)కి సమానం కాదు. కనుక జవాబు తప్పు.

వర్గం :

671 యొక్క వర్గం 450 341 వచ్చింది. ఇది తప్పా?

671 యొక్క మూలాంకం = 5

5 యొక్క వర్గం = 25 లేక 2 + 5 = 7

వచ్చిన జవాబు (450341) యొక్క మూలాంకం = 8 కనుక జవాబు తప్పు.

ఈ విధంగా వచ్చిన జవాబు తప్పు అవునో కాదో సులభంగా నిర్ణయించవచ్చు.

షరా : ఈ చిట్కాలు పంతుళ్ళకోసమే కాని విద్యార్థులకు కాదు.

*   *   *

# 27. లంకెల బిందెలు

పిండారీ దండులు ఊళ్ళమీదపడి యథేచ్ఛగా దోచుకుంటున్న రోజులవి. కోటికి పడగలెత్తిన గురవయ్యసెట్టికి భయం పట్టుకుంది. తాతముత్తాతల కాలం నుంచీ రత్నాలు, బంగారునగల వ్యాపారంచేసి ఆర్జించిన ధనరాశులన్నీ ఆరు ఇత్తడి బిందెలలో పోసి, అర్ధరాత్రివేళ రెండో కంటి వాడికి తెలియకుండా అడవిలో ఒకచోట స్వయంగా గొయ్యితవ్వి, పూడ్చేశాడు. నిధి ఎక్కడుందో తనకు తప్ప మరెవరికీ తెలియకుండా ఉండాలని ఆ గొయ్యి తవ్వినచోటికి గుర్తులు గుప్తమైన భాషలో ఒక రాగి రేకుమీద చెక్కి జాగ్రత్త చేశాడు.

అంతలో పిండారీ గుంపులు రానే వచ్చాయి. గురవయ్యసెట్టిని పట్టుకుని డబ్బుకోసం నానావిధాలా బాధించారు. ఏమయినా అతడు నోరు విప్పలేదు. ఆఖరికి దొంగలు విసుగెత్తి, అతడిని చంపి వెళ్ళిపోయారు.

అంతే. అతడి డబ్బు అంతా ఏమైపోయిందో, ఎక్కడ ఉంచాడో ఎవరికీ అంతుబట్టలేదు. అతని సంతతికికూడా ఆ ఆచూకీ తెలియదు. గురవయ్యసెట్టి రహస్యంగా దాచి ఉంచిన రాగిరేకు కొన్నాళ్ళకి బయటపడింది. దానిమీద ఒక వైపున ఇల్లా వ్రాసి ఉంది:

**"మంత్రాలమర్రికి ఈశాన్యంగా తలకాయలో రావి చెట్టు. దానికి ఆగ్నేయంగా కాలయమలో చింతచెట్టు. దానికి సరసన తూర్పుగా, మరల ఉత్తరంగా"**

ఇదేదో పిశాచాల బాషలా కనబడింది. "తలకాయలో రావిచెట్టు అంటా డేమిటి నా తలకాయ!" అనుకున్నారు.

"కాలయమలో చింతచెట్టు" అనే మాటకు అర్థం అసలే తెలియలేదు.

పోనీ అడవిలోకి వెళ్ళి వెతుకుదామా అంటే, మంత్రాల మర్రికి చుట్టు పక్కల ఎక్కడపడితే అక్కడ రావిచెట్లూ, చింతచెట్లూ బోలెడున్నాయి. వాటిలో ఏ చెట్టు అనుకోవాలి?

ఆ రాగిరేకుకి రెండోవైపున అంతకన్న చిత్రమైన వ్రాత కనిపించింది.

కాన ) ర స త త న ( స య న
ర త న
మ మ త
మ ర ల
ర త న
ర త న

ఇది బొత్తిగా అర్థరహితంగా కనిపించింది. గురవయ్యసెట్టి కుటుంబీకులు ఆ నిధికోసం చాలాసార్లు ప్రయత్నించి, దొరకక, నిరాశచెంది, వదిలేశారు.

ఆ వంశంలో నాలుగోతరంలో ఒక ఉద్దండపిండం పుట్టింది. గురవయ్యసెట్టి చనిపోయిన 92 సంవత్సరాల తర్వాత ఆ నిధికోసం మళ్ళీ ఈ యువకుడు వేట ప్రారంభించాడు. అహోరాత్రాలూ నిద్రాహారాలు మాని అదేపనిగా ఆలోచించసాగేడు. గునపం పుచ్చుకుని అడవిలో వెతకక, కాగితం కలం పుచ్చుకుని ఆ రాగిరేకులో వెదుకసాగేడు.

రాగిరేకుకి రెండో వైపున ఉన్న భాగహారంలా కనబడే విచిత్రమైన అక్షరాల లెక్కను చూచి, తన ముత్తాత గురవయ్యసెట్టి గణితంలో చాలా గట్టివాడని గ్రహించాడు. ఈ భాగహారంలో వాడిన ఎనిమిది అక్షరాలే రాగిరేకుకి మొదటి వైపున ఉన్న అర్థంకాని మాటలలోనూ కనిపిస్తున్నాయి. అంటే ఏమన్న మాట? అర్థం కాకుండా ఉన్న మాటలలోని ప్రతి అక్షరమూ ఒక ప్రత్యేకమైన అంకెను సూచిస్తుంది. ఆ అక్షరాల విలువలు తెలుసుకోడానికి ఈ భాగహారం ఉపయోగపడుతుంది. ఆ అక్షరాల విలువలు తెలిస్తే నిధికి దరిదాపులలోకి వెళ్ళినట్లే.

ఇంతవరకూ బాగానే ఉంది కానీ, భాగహారంలోని అక్షరాల విలువలు ఎలా తెలుస్తాయి? అక్కడే ఉంది ఇబ్బంది అంతా.

గురవయ్యసెట్టి మునిమనుమడు ఈ చిక్కును ఎల్లాగైనా విడదీయాలని పట్టుపట్టేడు. అతడు ఉపయోగించిన తర్కాన్ని స్థూలంగా వివరిస్తాను.

రాగిరేకుమీది భాగహారాన్ని చూస్తే ఒకానొక ఐదు అంకెల సంఖ్యని రెండు అంకెల సంఖ్యచే భాగిస్తే, మూడు అంకెల సంఖ్య విభక్తంగా వచ్చిందనీ నిశ్శేషంగా పోయిందనీ తెలుస్తోంది.

విభక్తంలో మొదటి అక్షరంలో న
విభాజకంలో చివరి అక్షరం న.

న ని న పెట్టి గుణిస్తే వచ్చే సంఖ్యలో చివరి అంకె కూడా న.
దీనినిబట్టి న విలువ 1 కావచ్చు, లేదా 5 కావచ్చు, లేదా 6 కావచ్చు.
ఇంక న విలువ ఈ 1, 5, 6 లలో ఏదో తెలుసుకోవాలి.

కాన అనే రెండు అంకెల సంఖ్యని న అనే అంకె పెట్టి గుణించగా, రతన అనే మూడు అంకెల సంఖ్య వచ్చింది. అంటే న విలువ ఒకటి అవడానికి వీలులేదు. కనుక న విలువ 5 గాని, 6 గాని అయి ఉండాలి.

అది అల్లా ఉంచి, మమత లోని త లో నుంచి మరల లోని "ల" తీసివేస్తే త మిగిలింది. అంటే ల విలువ సున్న అయి ఉండాలి. హమ్మయ్య! ఇప్పటికి ఒక అక్షరం బయటపడింది.

"కాన"ని య పెట్టి గుణిస్తే మరల అనే సంఖ్య వచ్చింది. ఇందులో ఒకట్ల స్థానంలోని ల విలువ సున్న. కనుక న విలువ 5 అయి ఉంటే య అనేది సరిసంఖ్య అయి ఉండాలి; అది 2, 4, 6, 8 లో ఏదైనా కావచ్చు. లేక న విలువ 6 అయి ఉంటే య విలువ 5 మాత్రమే అయి ఉండాలి. ఈ రెండూ గుణిస్తే లబ్ధం చివర సున్న రావడం మరోలా సాధ్యం కాదుకదా?

అది అల్లా ఉంచు. రెండవ తీసివేత (మమత - మరల) లో మ లో నుంచి ర తీసివేస్తే ర మిగిలింది. అంటే మ విలువ ర కి రెట్టింపు అన్నమాట. కనుక ర విలువ 4 కన్న ఎక్కువ ఉండడం సాధ్యం కాదు. అది 1, 2, 3, 4 లలో ఏదైనా కావచ్చు; కనుక మ విలువ 2, 4, 6, 8 లలో ఏదైనా అయి ఉండవచ్చు.

ఇప్పుడు య విలువ 5, న విలువ 6 అయి ఉంటే, ర విలువ 4 కన్న ఎక్కువ అయి తీరుతుంది. కనుక న విలువ 6 కాదు, 5 మాత్రమే అయి ఉండాలి:

ఇంతవరకూ తెలిసినదానిని బట్టి ఆ భాగహారాన్ని మళ్ళీ వ్రాస్తే ఇల్లా ఉండాలి.

```
కా 5 ) ర న త త 5 ( 5 య 5
       ర త 5
       ------
           మ మ త
           మ ర ల
           ------
             ర త 5
             ర త 5
             ------
```

ఇందులో య అనేది సరి సంఖ్య; అది 2, 4, 6, 8 లలో ఏదో ఒకటి కావచ్చు.

మ విలువ ర కి రెట్టింపు

ర విలువ 1, 2, 3, 4 లలో ఏదో ఒకటి

క్రాన × య = మరల

మరల అనే మూడు అంకెల సంఖ్యలో వందల స్థానంలో ఉన్న అంకె పదుల స్థానంలో ఉన్న అంకెకు రెట్టింపు అయి ఉండాలి. ఉదాహరణకు:

క్రా విలువ 1 అనుకుందాం.

య కు 2, 4, 6, 8 అనే విలువలు వరుసగా ఇచ్చి, గుణించి, పైన చెప్పిన అక్షరాలు గల మరల అనే సంఖ్య వస్తుందేమో చూద్దాం.

15 × 2 = 36

15 × 4 = 60

15 × 6 = 90

15 × 8 = 120

వీటిలో ఏ ఒక్కటీ నప్పదు. కనుక క్రా విలువ 1 అయి ఉండడానికి వీలులేదు.

ఇల్లాగే క్రా కి 1 నుంచి 9 వరకూ అన్ని విలువలూ ఇచ్చుకుంటూ, 2, 4, 6, 8 లతో వరుసగా గుణించి సరిచూసుకుంటూ పోతే క్రా = 3; య = 6 అయితేనే నప్పుతుంది అని తెలుస్తుంది. అప్పుడు 35×6=210. ఇందులో వందల స్థానం పదుల స్థానానికి రెట్టింపు ఉంది కదా?

క్రాన విలువ తెలిసింది. దీనిని న చే గుణిస్తే, 35 × 5 = 175 వస్తుంది. ఇదే తరన అనే సంఖ్య కనుక ర = 1; త = 7 అని తెలుస్తుంది. ఇంతవరకూ తెలిశాక స = 9 అని సులభంగానే తెలుస్తుంది.

ఇప్పుడు అక్షరాలలో ఉన్న భాగహారాన్ని మనకు తెలిసిన అంకెలలోకి మార్చితే ఇల్లా ఉంటుంది:

```
35 ( 19772 ( 565
      175
     -----
       227
       210
     -----
        175
        175
     -----
```

ఈ భాగహారంలో వాడిన ఎనిమిది అక్షరాల విలువలను వరుసగా వ్రాద్దాం:

ల - ర - మ - కా - న - య - త - స

0 1 2 3 5 6 7 9

రహస్య లిపిలో **తలకాయ** అనే మాటను తీసి, దాని స్థానంలో 7036 అనే సంఖ్యను వ్రాయాలి. ఈ సంఖ్య దూరాన్ని అడుగులలో సూచిస్తుందని గురవయ్య సెట్టి మునిమనుమడు సులభంగానే గ్రహించగలిగేడు.

అల్లాగే **కాలయమ** = 3062 అనీ,

**సరసన** = 9195 అనీ,

**మరల** = 210 అనీ

గ్రహించాడు.

ఇప్పుడు ఆ రహస్య భాషను చదివితే ఇల్లా ఉంటుంది:

"మంత్రాల మర్రికి ఈశాన్యంగా 7036 (అడుగుల దూరం)లో రావిచెట్టు; దానికి ఆగ్నేయంగా 3062 (అడుగుల దూరం) లో చింతచెట్టు; దానికి 9195; (అడుగుల దూరం) తూర్పుగా (నడిచి), 210 (అడుగుల దూరం) ఉత్తరంగా (వెళ్ళి తవ్వాలి)."

ఈ భోగట్టా తెలుసుకున్న నాటి రాత్రే గురవయ్య సెట్టి వారసుడు అడవికి వెళ్ళి ఆ నిధిని తవ్వి బయటికి తీశాడు.

అన్నట్లు ఆ నిధి విలువ అప్పటి ధర ప్రకారం 2 కోట్ల 76 లక్షల 38 వేల రూపాయలని తెలియవచ్చింది.

* * *

# 28. ఏడు జంటలు

పాశ్చాత్య నాగరికత చెంపల వెంట కారుతున్న ఏడు జంటలు ఒకనాటి రాత్రి ఒక ఇంట్లో పార్టీలో కలుసుకున్నాయి. ఆ యింటి యజమాని కరుణాకర్‌కి చిన్ననాటి స్నేహితుడైన యుగంధరరావు అనుకోకుండా అదే సమయానికి ఆ ఇంటికి వచ్చి వారినందరినీ కలుసుకున్నాడు. ఒక్క కరుణాకర్‌కి తప్ప మిగిలిన పదముగ్గురికి అతడు అపరిచితుడే.

"యుగంధరరావు అని చెబుతూవుంటానే వాడేవీడు. లాజిక్కుతో అనర్గళంగా వాదించటంలో ఇతడు నిపుణుడు. తర్కం వీడిది తిమ్మరుసులాంటి బుర్ర అని మేము చదువుకునే రోజుల్లో అనుకునేవాళ్ళం" అని అతడిని అందరికీ పరిచయం చేశాడు కరుణాకర్.

"నీ పొగడ్తలతో నన్ను సిగ్గుపరచక వారిని కూడా నాకు పరిచయం చెయ్యిమరి" అన్నాడు యుగంధర్.

"ఓ యస్. ఈరోజున ఏడు కుటుంబాల వాళ్ళం కలుసుకున్నాం."

"తెలుస్తూనే ఉంది."

మిత్రుడికేసి చూసి చిరునవ్వు నవ్వేడు కరుణాకర్. అతడి మనస్సులో చిత్రమైన ఊహ మెరిసింది. మగవాళ్ళ నందరినీ మిత్రుడికి పరిచయం చేశాడు ముందర. "ఇదుగో వీళ్ళు గంగాధరం, చలపతి, జగన్నాథ్, ప్రసాదరావు, రమణమూర్తి, సత్యం - నా ప్రాణస్నేహితులు."

అటు తరవాత ఆడవాళ్ళను ఏడుగురినీ జలజ, రాధ, సరళ, ప్రతిమ, గీత, చంప, కమల అని పేరులు మాత్రం చెప్పి పరిచయం చేశాడు.

"వట్టిపేర్లు చెబితే ఏమైనట్లూ? ఎవరి భార్య ఎవరో కూడా పరిచయం చెయ్యి మరి" అన్నాడు యుగంధర్.

"నువ్వు చదివింది తర్కశాస్త్రం కదా - అపాటి తెలుసుకోలేవూ? కొన్ని గుర్తులు చెబుతాతే.

ఈ పార్టీలో ఏ మగాడూ తన భార్యతో కలిసి డాన్సు చెయ్యడు.

తరవాత ఆడటోయే బ్రిడ్జిలో భార్యా భర్తలు ఎప్పుడూ ఒకేసారి ఆడరు.

ఈ రెండు గుర్తులనూ ఉపయోగించి ఈ రాత్రి పార్టీ పూర్తి అయేలోగా ఎవరి భార్య ఎవరో నువ్వు తెలుసుకోగలగాలి" అన్నాడు కరుణాకర్.

అతిరధులందరూ ఈ యుగంధరం ఏపాటి తెలుసుకోగలడో చూద్దామనే కుతూహలంతో ఎక్కడా బయటపడిపోకుండా ఉండడానికి ప్రయత్నించారు. యుగంధర్ జాగ్రత్తగా పరిశీలించసాగేడు.

కరుణాకర్ ప్రతిమతోనూ, చంపతోనూ డాన్సు చేశాడు. సత్యం ప్రతిమతోనూ, గీతతోనూ; రమణమూర్తి జలజ, చంపలతోనూ, చలపతి ప్రతిమతోనూ; జగన్నాథ్ చంపతోనూ; ప్రసాదరావు గీతతోనూ డాన్సు చేశారు.

బ్రిడ్జి ఆడేటప్పుడు చలపతి, కరుణాకర్‌లు గీత, సరళలతో ఆడేరు. ఒక రబ్బరు అయాక మగవాళ్ళ స్థానాలను జగన్నాథ్, రమణమూర్తి ఆక్రమించారు. ఆ ఆడవాళ్ళిద్దరూ రెండో రబ్బరు కూడా ఆడేరు.

మూడవ రబ్బరులో గీత, సరళ లేచి వెళ్ళిపోయారు. ఆ స్థానాలల్లో కమల, ప్రతిమ కూర్చుని ఆడేరు. పై ఇద్దరు మగవాళ్ళూ మూడో రబ్బరుకూడా ఆడేరు.

అంతే - పార్టీ ముగిసింది.

డాన్సునీ, బ్రిడ్జి ఆటనూ గమనిస్తున్న యుగంధర్ ఎవరి భార్య ఎవరో నిర్ణయించగలిగేడు! మీరు కూడా చెప్పగలరేమో ప్రయత్నించండి.

జ వా బు :

"ఇదికాదు, ఇదికాదు" అని మాత్రమే తెలియజెప్పే ఇటువంటి "నేతి నేతి సమస్యల"ను సాధించడానికి ఈ క్రింది పద్ధతి బాగా ఉపయోగపడుతుంది.

ముందర నిలువుగా ఒక వరసలో మగవాళ్ళ పేర్లూ, అడ్డంగా వరుసలో ఆడవాళ్ళ పేర్లూ వ్రాయాలి. ఇక్కడ మనకు తెలిసిందల్లా వ్యతిరేక సమాచారమే; అంటే ఫలానా స్త్రీ ఫలానా మగవాడి భార్యకాదు అని మాత్రమే తెలిసింది. ఈ విధంగా తెలిసిన విషయాలన్నిటికీ X గుర్తులు ఆయా పేర్ల దగ్గర వ్రాసుకుంటూపోవాలి. ఇది ఎల్లాగంటే—

కరుణాకర్ ప్రతిమతో డాన్సు చేశాడు. అంటే ఆమె కరుణాకర్ భార్య కాదు. కనుక ఈ రెండు పేర్లూ కలసిన గదిలో X గుర్తు పెట్టు. అతడు చంపతోకూడా డాన్సు చేశాడు. కనుక ఈ రెండు పేర్లూ కలిసిన గదిలో X గుర్తు పెట్టు.

| | ప్రతిమ | కమల | రాధ | చంప | జలజ | గీత | సరళ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| కరుణాకర్ | X | | | X | | X | X |
| గంగాధర్ | | | | | X | | |
| చలపతి | X | | | | | X | X |
| జగన్నాథ్ | X | X | | X | | X | X |
| ప్రసాదరావు | | | | | | | X |
| రమణమూర్తి | X | X | | X | X | X | X |
| సత్యం | X | | | | | X | |

అతడు గీత, సరళలతో బ్రిడ్జి ఆడేడు; కనుక ఆ పేర్లు కలిసినచోట్ల కూడా X గుర్తు పెట్టు.

ఈ విధంగా వ్యతిరేకార్థ సూచకంగా X గుర్తు పెట్టుకుంటూ పోతే పై పట్టికలో చూపినట్లు ఉంటుంది.

ఈ పట్టికను తయారుచేశాక ఇంక తక్కిన పని చాలా సులభం. కరుణాకర్‌కి ఎదురుగా నాలుగు X గుర్తులున్నాయి. ఈ X గుర్తులేని కమల, రాధ, జలజలలో ఒకరు అతని భార్య అని తెలుస్తోందే కాని, ఫలానా అని చెప్పడం సాధ్యం కాదుకదా?

ఇలాగ ఒక్కొక్క మగవాడి పేరే చూసుకుంటూ వెడితే రమణమూర్తికి ఎదురుగా ఆరుచోట్ల X గుర్తులు కనిపిస్తాయి; ఒక్క రాధ కింద తప్ప. అంటే రాధ రమణమూర్తి భార్య అన్న మాటేకదా? ఈ రహస్యం తెలియగానే

రాధకూ తక్కిన అరుగురు మగాళ్ళకూ సంబంధం లేదని తెలుపడానికి ఆయా స్థలాలలో X గుర్తులు పెట్టు.

గీత పేరుకింద ఆరు X గుర్తులు కనిపిస్తున్నాయి. ఈ గుర్తు లేనిది ఒక్క గంగాధర్‌కి ఎదురుగా మాత్రమే. అంటే గంగాధర్ గీత భర్త అని తేటతెల్లమే కదా? ఇది తెలిశాక గంగధర్‌కి తక్కిన ఆడవాళ్ళకి సంబంధం లేదని తెలుపడానికి ఆయా స్థలాలలో X గుర్తులు పెట్టుకోవాలి.

కొత్తగా చేర్చిన X గుర్తులవల్ల జగన్నాథ్‌కి ఎదురుగా ఆరు X గుర్తులు కనబడుతున్నాయి. ఈ గుర్తులేని జలజ జగన్నాథ్‌కి భార్య అని నిర్ణయించవచ్చు.

ఈ సంగతి తెలియగానే జలజ పేరు కిందగల ఇతర మగవాళ్ళకు ఎదురుగా X గుర్తులు పెట్టుకోవాలి.

ఈ విధంగా చేసుకుంటూపోతే—

కరుణాకర్ - కమల

గంగాధర్ - గీత

చలపతి - చంప

జగన్నాథ్ - జలజ

ప్రసాదరావు - ప్రతిమ

రమణమూర్తి - రాధ

సత్యం - సరళ

భార్యభర్తలు అని తెలుస్తుంది.

* * *

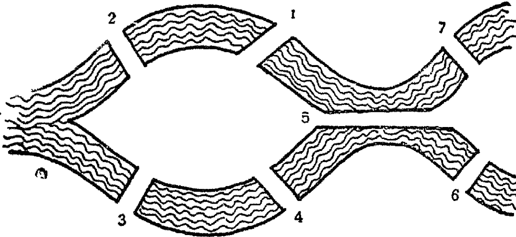
# 29. కోనింగ్స్‌బర్గ్ వంతెనలు

జర్మనీలో కోనింగ్స్‌బర్గ్ అనే పట్టణంగుండా ఒక నది ప్రవహిస్తోంది. ఒకచోట ఆ నది రెండు పాయలుగా చీలింది. మధ్యలో లంకలు ఏర్పడ్డాయి. 38 వ బొమ్మలో చూపినట్లు ఆ నదీశాఖల మీద ఏడు వంతెనలు కట్టేరు.

ఆ నగరవాసులు తీరుబాటువేళ వాహ్యాళికి వెళ్ళి, ఆ వంతెనల మీదుగా మధ్యలో ఉన్న లంకలలో ప్రవేశించి, ఒక గమ్మత్తయిన ఆట ఆడుతూ ఉంటారు. ఎక్కడో ఒకచోట బయలుదేరి ఆ ఏడు వంతెనలనూ దాటాలి. దాటిన వంతెన మళ్ళీ దాటకూడదని నియమం.

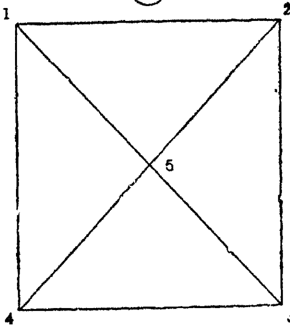
వాళ్ళు ఎన్నిసార్లు ప్రయత్నించినా ఈ విధంగా దాటడం సాధ్యమే కాలేదు. మీరు కూడా ప్రయత్నించి చూడండి, కొరుకుడు పడుతుందేమో!

38




ఆఖరికి అయిలర్ అనే ప్రఖ్యాత గణిత శాస్త్రజ్ఞుడు ఈ సమస్యను కూలంకషంగా పరిశీలించి, ఈ విధంగా దాటడం అసాధ్యమని తేల్చివేశాడు.

39




ఇటువంటి చిక్కు సమస్యల ముడి విప్పడానికి మనదేశంలో వీధిబడులలో ప్రతి పిల్లవాడూ ఎప్పుడో ఒకప్పుడు ప్రయత్నించే ఉంటాడు. ఖేదమల్లా, వంతెనలను దాటడానికి బదులుగా, కాగితంమీద గీతలుగీసి ఆడుతూ ఉంటారు.

"పెనిసిలు పైకెత్తకుండా, గీసిన గీతమీద మళ్ళీ గీయకుండా ఈ బొమ్మను కాగితంమీద గియ్యి చూద్దాం" అని ఒకడు సవాలు చెయ్యడమూ, క్లాసులో మేష్టారు చెప్పే పాఠాన్ని పెడచెవినిబెట్టి, మిగిలినవారంతా ఈ ముగ్గును గీయడానికి ప్రయత్నించి కాగితాలు ఖరాబు చెయ్యడమూ, ఖర్మ చాలకపోతే మేష్టారు ఈ ఆటను చూచి పిల్లకాయలకి పేపావారి అమ్మాయి నిచ్చి

పెళ్ళిచెయ్యడమూ, అక్కడితో ఆ ప్రయత్నం ఆగిపోవడమూ జరుగుతూనే ఉంటుంది.

పైన చెప్పిన వంతెనలు దాటే సమస్యకి, ఈ "ముగ్గు"ను గీసే సమస్యకి చాలా దగ్గరిపోలిక వుంది. నియమాలు రెంటికీ ఒక్కటే. వీధిబడి మేష్టర్లకి ఆకతాయి ఆటగా కనిపించిన ఈ సమస్య అయిలర్ పండితుడికి అత్యద్భుతంగా కనిపించింది. ఆయన ఇటువంటి సమస్యలన్నిటినీ అమూలాగ్రంగా చర్చించి ఏవి అసాధ్యమో, ఏవేవి సాధ్యమో, సాధ్యం అయితే అది ఎల్లా చెయ్యాలో మూడు సూత్రాలలో కట్టె-కొట్టె-తెచ్చె అని తేల్చివేశాడు.

ఇటువంటి సమస్యలు ఇచ్చినప్పుడు గమనించవలసిన ముఖ్యవిషయాలు కొన్ని ఉన్నాయి. కొన్ని కొత్త మాటలను నేర్చుకోవడమూ అవసరమే.

కొన్ని రేఖలు ఒకచోట కలుసుకున్న బిందువును "శీర్షం" అంటారు. పైన గీసిన చదరపు ముగ్గులో మొత్తం 5 శీర్షాలు ఉన్నాయి. (నాలుగు మూలలలోనూ నాలుగూ, మధ్యలో ఒకటీనూ.)

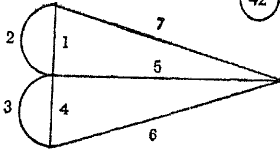
2, 4, 6, 8.... వంటి సరిసంఖ్యగల రేఖలు కలుసుకున్న బిందువును "సరి శీర్షం" అంటారు 2, 3, 5, 7.... వంటి బేసి సంఖ్యగల రేఖగలు కలుసుకున్న బిందువును ''బేసి శీర్షం'' అంటారు. పై చదరపు ముగ్గుతో మధ్యలో ఉన్న శీర్షంలో నాలుగు రేఖలు కలుసుకున్నాయి. కనుక ఇది సరిశీర్షం. మూలలలో ఉన్న శీర్షాల దగ్గర మూడేసి రేఖలు కలుసుకున్నాయి. కనుక ఈ నాలుగూ బేసి శీర్షాలు.

ఇటువంటి ముగ్గు నొకదానిని ఇచ్చి పెనిసిలు ఎత్తకుండా, గీసిన గీత మీద మళ్ళీ గీయకుండా, బొమ్మ అంతా పూర్తి చెయ్యమని సమస్య నిచ్చినప్పుడు - దుడుంగున మొదలు పెట్టెయ్యక ఆ బొమ్మను జాగ్రత్తగా పరిశీలించాలి. అందులో ఎన్ని బేసి శీర్షాలు ఉన్నాయో లెక్కపెట్టాలి.

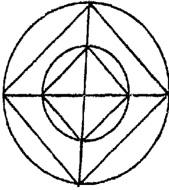
1. అన్నీ సరిశీర్షాలే ఉండి బేసిశీర్షాలు అసలు లేకపోతే ఆ ముగ్గును బహు సునాయాసంగా తోచిన చోట మొదలుపెట్టి, తోచిన దారితో నడిచి, పూర్తిచెయ్యవచ్చు. ఇది అన్నిటికన్న సులభమైన సమస్య.

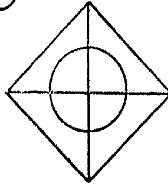
2 బేసి శీర్షాలు 2, 3, 5, 7....వంటి బేసిసంఖ్యలో ఎప్పుడూ వుండవు; ఉండడం సాధ్యం కాదు. ఉంటే సరి సంఖ్యలో ఉంటాయి.

బేసి శీర్షాలు 2 మాత్రమే ఉంటే ఆ ముగ్గును వ్రాయడం సాధ్యమే కాని తోచినచోట మొదలుపెట్టి తోచినచోట అంతం చేయడానికి వీలులేదు. బేసి శీర్షాలు రెండులోనూ ఒకదానిమీద మొదలుపెట్టి, రెండవదానిమీద పూర్తి చెయ్యాలి; ఇల్లా చేస్తేనే సాధ్యం అవుతుంది.



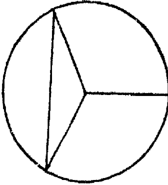
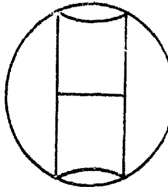
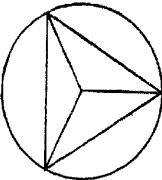
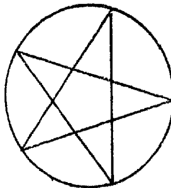
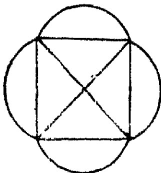
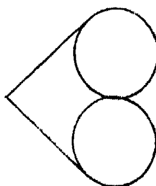

కోనింగ్స్‌బర్గు వంతెనల సమస్య ఎందుకు అసాధ్యమో ఇప్పుడు చూద్దాం. ఆ వంతెనల బొమ్మను సూక్ష్మంగా ఇక్కడ చూపినట్లు (42 వ బొమ్మ) వ్రాయవచ్చు.





ఈ బొమ్మలో దాటవలసిన వంతెనలను గీతలతోనూ నది ఒడ్డునూ, లంకలనూ బిందువులతోనూ సూచించాను. అందులో ఉన్న నాలుగు శీర్షములూ బేసివే. కనుక ఇది అసాధ్యమని వేరే చెప్పేదేమిటి?

అభ్యాసం కోసం 43 వ బొమ్మలోని ముగ్గులు ప్రయత్నించండి.

# 30. తప్పు ఎక్కడ?

ఈ వ్యాసంలో ఇచ్చిన సమస్యల జవాబులన్నీ తప్పుగా ఉంటాయి; చేసిన లెక్కమాత్రం సరిగ్గా ఉన్నట్లే ఉంటుంది.

అంతా సరిగ్గానే చేస్తే జవాబు తప్పు ఎందుకు అవుతుంది? అంటే, ఎక్కడో పప్పులో అడుగువేసి ఉండాలి. ఆ తప్పు ఎక్కడ జరిగిందో వెతికి పట్టుకోండి చూద్దాం.

## I. తూనికలలో చమత్కారం :

(a) 2 శేర్లు = 48 తులాలు

$\frac{1}{2}$ శేరు = 12 తులాలు

ఈ రెండు సమీకరణాల ఎడమ భాగాలూ, కుడిభాగాలు గుణిస్తే

$2 \times \frac{1}{2}$ శేర్లు = $48 \times 12$ తులాలు లేక 1 శేరు = 576 తులాలు!

ఇందులో తప్పు ఎక్కడ?

(b) $\frac{1}{4}$ రూపాయి = 25 పైసలు

రెండు వైపులా వర్గమూలం తీసుకుంటే

$\sqrt{\frac{1}{4}}$ రూపాయి = $\sqrt{25}$ పైసలు ;

లేక $\frac{1}{2}$ రూపాయి = 5 పైసలు!

ఇందులో తప్పు ఎక్కడ?

(c) ఒక మైలు చదరము = ఒక చదరపుమైలు

ఇందులో సందేహ మేమీ లేదుకదా? ఇప్పుడు రెండు వైపులా 2 పెట్టి గుణిస్తే

2 మైళ్ళ చదరము = 2 చదరపుమైళ్ళు.

ఈ రెండూ నిజంగా సమానమే నంటారా?

జవాబు :

(a) ఈ లెక్కలో అంకెలను మాత్రమే గుణించాం. అ అంకెలు సూచించే ప్రమాణముల జోలికి పోలేదు. అదిగో, తప్పు అక్కడ ఉంది.

2 శేర్లు $\times$ $\frac{1}{2}$ శేరు = 48 తులాలు $\times$ 12 తులాలు లేక

1 $(\text{శేరు})^2$ = 576 $(\text{తులములు})^2$ అని వ్రాయాలి.

కాని $(\text{శేరు})^2$, $(\text{తులములు})^2$ అనే మాటలకు అర్థంలేదు.

అదే అడుగులు, అంగుళాలు ఉపయోగిస్తే ఈ గుణకారం అర్థవంతమై ఉండేది.

2 అడుగులు = 24 అంగుళాలు

$\frac{1}{2}$ అడుగు = 6 అంగుళాలు

రెండు వైపులా గుణిస్తే

1 (అడుగు)$^2$ = 144 (అంగుళాలు)$^2$ లేదా

1 చదరపు అడుగు = 144 చదరపు అంగుళాలు. ఈ లెక్క సరిగ్గానే ఉందికదా?

(b) ఇదే సమాధానం రూపాయలు, పైసలకీ వర్తిస్తుంది.

(c) $1^2 = 1$

అన్నది నిజమేకానీ

$2^2 = 2$ కాదుకదా?

ఇక్కడ జరిగినది ఇటువంటి పొరబాటే

2 మైళ్ళ చదరం అంటే 2 మైళ్ళ భుజము కలిగిన చదరం అని అర్థం. ఇది 4 చదరపు మైళ్ళకి సమానం.

## II. వర్గమూలంలో చమత్కారం :

a) $16 - 48 = 64 - 96$

ఈ సమీకరణం సరిగ్గానే ఉందని ఒప్పుకుంటారు కదా?

ఇప్పుడు రెండువైపులా 36 కలుపు

$16 - 48 + 36 = 64 - 96 + 36$

దీనినే ఈ క్రింది విధంగా వ్రాయవచ్చు.

$(4 - 6)^2 = (8 - 6)^2$

లేక $4 - 6 = 8 - 6$

లేక $4 = 8$

ఇది నిజమని నమ్మడం ఎల్లాగ?

b) $(n + 1)^2 = n^2 + 2n + 1$

$\therefore (n + 1)^2 - (2n + 1) = n^2$

రెండు వైపులనూ n (2n + 1) తీసివేస్తే

$(n + 1)^2 - (n + 1)(2n + 1 = n^2 - 2m (2n + 1)$

రెండు వైపులనూ $\frac{1}{4}(2n + 1)^2$ కలిపితే

$(n + 1)^2 - (n + 1)(2n + 1) + \frac{1}{4}(2n + 1)^2$

$= n^2 - n(2n + 1) + (2n + 1)^2$

$\therefore [(n + 1) - \frac{1}{2}(2n + 1)]^2 = [n - \frac{1}{2}(2n + 1)]^2.$

రెండు వైపులా వర్గమూలం తీసుకుంటే

$$(n + 1) - \frac{1}{2}(2n + 1) = n - \frac{1}{2}(2n + 1)$$

$$\therefore n = n + 1$$

ఇది అర్థరహితం కదా? అయితే తప్పు ఎక్కడ?

జ వా బు :

వర్గమూలములు తీసుకోవడంలో జరిగిన పొరబాటే ఈ అసందర్భాలకు కారణం.

ఉదాహరణకి : 25 యొక్క వర్గమూలం కేవలం 5 మాత్రమేకాదు 25 కూడానూ. ప్రతి సంఖ్యకీ రెండు వర్గమూలములు ఉంటాయి. ఒకటి ధనసంజ్ఞ (+) గలదీ, మరొకటి ఋణ సంజ్ఞ (−) కలదీనూ. ఏ పరిస్థితిలో ఏది సరిపోతుందో అది మాత్రమే తీసుకోవాలి రెండవది వదిలెయ్యాలి.

II. (a) లో వర్గమూలములు తీసుకున్నప్పుడు

$$(4-6) = -(8-6)$$

అని ఋణవర్గమూలాన్ని ఉపయోగించాలి.

అప్పుడు $-2 = -2$

అనే అర్థవంతమైన జవాబు వస్తుంది. ఇల్లాగే II b) విషయంలో కూడా వర్గమూలములు తీసుకున్నప్పుడు

$$(n + 1) - \frac{1}{2}(2n + 1) = -\left[n - \frac{1}{2}(2n + 1)\right]$$

అని తీసుకోవాలి.

అప్పుడు $n = n$ అని మాత్రమే వస్తుంది.

## III. శూన్యంతో చమత్కారం

a) $$\frac{x+5}{x-7} - 5 = \frac{4x - 40}{13-x}$$

అనే సమీకరణాన్ని సూక్ష్మీకరించాలి అనుకో

$$\frac{x+5(x-7)}{x-7} = \frac{4x-40}{13-x}$$

$$\frac{4x-40}{7-x} = \frac{4x-40}{13-x}$$

ఈ సమీకరణంలో రెండు వైపులా "లవములు" సమానమే కనుక, హారములు కూడా సమానమే అయివుండాలి.

$$\therefore 7 - x = 13 - x$$

లేక $7 = 13$

ఇది అర్థరహితమైన జవాబుకాదూ? మరి ఇందులో తప్పు ఎక్కడ?

(b) $15x + 12 = 6x + 30$

అనే సమీకరణ ఉన్నదనుకో.

$\therefore 15x - 30 = 6x - 12$

లేక $5(3x - 6)\ 2(3x - 6)$

రెండు వైపులా $(3x - 6)$చే భాగిస్తే

$5 = 2$

అనే చిత్రమైన సమాధానం వస్తుంది. ఇందులో తప్పు ఎక్కడ?

(c) $A + B = C$

అనే సమీకరణం ఉంది. ఇందులో

($A = 3$; $B = 2$ అని తీసుకుంటే $C = 5$ అవుతుంది.)

ఈ సమీకరణంలో రెండువైపులా $(A + B)$ చేత గుణిస్తే

$(A + B)\ (A + B) = C\ (A + B)$

$\therefore A^2 + AB - AC = - AB - B^2 + BC$

$\therefore A(A + B - C) = - B(A + B - C)$

రెండు వైపులా $(A + B - C)$ చే భాగిస్తే

$A = - B$

లేదా $A + B = 0$ లేదా $3 + 2 = 0$

ఇది అర్థరహితం కదా? అయితే తప్పు ఎక్కడ?

జ వా బు :

ఇక్కడ చూపించిన మూడు గమ్మత్తులలోనూ తప్పు ఒకటే.

సున్నని సున్నచే భాగిస్తే వచ్చే సంఖ్య ఇంత అని చెప్పడానికి లేదు. ఏదైనా కావచ్చు కనుక సున్నని సున్నచే భాగించకూడదు. ఈ పని చేస్తే ఊహించని వైపరీత్యాలు ఎన్ని అయినా ఎదురవుతాయి.

III (a) లో x విలువ 10

కనుక $(4x - 40)$ ని అదే సంఖ్యచే భాగించకూడదు.

III (b) లో x విలువ 2 కనుక

$3x - 6 = 0$

$(3x - 6)$ ని $(3x - 6)$ చే భాగించరాదు.

III (c) లో $(A + B - C) = 0$

కనుక $(A + B - C)$ ని $(A + B - C)$ చే భాగించకూడదు.

## IV. లాగరిదిమ్స్‌తో చమత్కారం

$\log(-1) = x$

అనే సమీకరణం ఉన్నదనుకుందాం. "లాగరిదమ్" సూత్రాల ననుసరిస్తే

$\log(-1)^2 = 2\log(-1) = 2x$

కాని $\log(-1)^2 = \log(1) = 0$

కనుక $2x = 0$

కాని ఇది నిజం కాదుకదా? మరి తప్పు ఎక్కడుంది?

జ వా బు :

ఋణ సంఖ్యల లాగరిదమ్ సంక్లిష్ట సంఖ్య (complex number) అయివుంటుంది. దీనికి విలువలు అనేకంగానే ఉంటాయి. తప్పు అక్కడ ఉంది.

## V. అనంత శ్రేణులతో చమత్కారం

$$\log 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} \cdots$$

వీటినే మరొకలాగ అమర్చితే,

$$\log 2 = \left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} \cdots\right) - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8} \cdots\right)$$

$$= \left[\left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} \cdots\right) + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8} \cdots\right)\right] - 2\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8} \cdots\right)$$

$$= \left[1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} \cdots\right]$$

$$-\left[1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}\cdots\right]$$

$= 0$

కాని $\log 2 = 0.69315$ అని మనకు తెలుసు. ఇదే శ్రేణిని మరొక లాగ అమర్చితే

$$\log 2 = 1+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{11}-\frac{1}{6}\cdots$$

$$=\frac{3}{2}\times 0.69315$$

అంటే $\log 2 = \frac{3}{2}\log 2$

ఇది బొత్తిగా అసందర్భం కదా?

అయితే తప్పు ఎక్కడ?

జవాబు :

అనంత శ్రేణులకి (Infinite Series) వర్తించే సూత్రాలు ప్రత్యేకంగా ఉన్నాయి. ఇవి తెలుసుకోకుండా వేలు పెట్టడం వల్ల కలిగిన అనర్థం ఇది.

## VI. క్షేత్రగణితంతో చమత్కారం

### ఏ త్రిభుజమైనా సరే సమద్విబాహు త్రిభుజమే!

అదెలాగ? అని ఆశ్చర్యపడుతున్నారా? క్షేత్ర గణిత సూత్రాలను ఉపయోగించి రుజువు చేస్తాను, చూడండి.

ABC అనే ఏదో ఒక త్రిభుజం (44 వ బొమ్మ) తీసుకుందాం C అనే కోణానికి సమద్విఖండన రేఖనూ, AB అనే భుజానికి సమద్విఖండన లంబ రేఖనూ గీద్దాం. ఈ రెండూ G అనే బిందువు దగ్గర ఖండించుకుంటున్నాయి. AC మీదికి GD అనే లంబరేఖనూ, BC మీదికి GF అనే లంబరేఖనూ గీద్దాం. AG, BG లు కలుపుదాం.

ఇప్పుడు CGD, CGF అనే త్రిభుజములలో

$\angle 1 = \angle 2$ (నిర్మాణంవల్ల)

$\triangle 3 = \triangle 4$ (సమకోణాలు)

CG ఉమ్మడిభుజం

కనుక CGD, CGF త్రిభుజాలు సర్వసమానములు. (Congruent)

కనుక DG=GF; CD=CF —(1)

తరువాత GDA, GFB అనే త్రిభుజములలో

$\angle 5 = \angle 6$ (సమకోణములు)

G అనే బిందువు AB యొక్క సమద్విఖండన లంబరేఖ మీద ఉన్నది కనుక

AG = GB

DG = GF (ఇంతకుముందే రుజువు చేశాం.)

కనుక GDA, GFB అనే త్రిభుజములు సర్వసమానములు.

కనుక DA=FB —(2)

(1), (2) కలిపితే

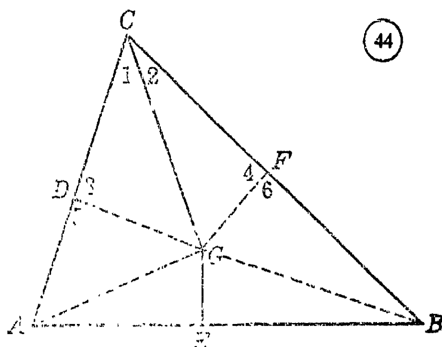
CD+DA=CF+FB

లేక CA = CB

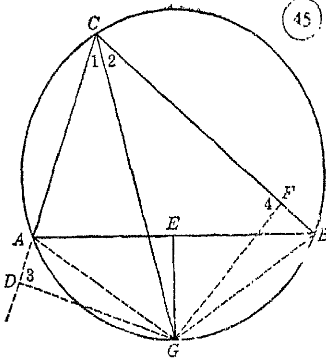
కనుక ABC అనేది సమద్విబాహు త్రిభుజం (Isosceles Triangle)

ఇందులో తప్పు ఎక్కడ?

జ వా బు :




44 వ బొమ్మలో చూపిన త్రిభుజంలో కోణం C యొక్క సమద్విఖండన రేఖ (CG), భుజం A యొక్క సమద్విఖండన లంబరేఖ (EG), త్రిభుజం ABC లోపల G దగ్గర ఖండించుకున్నట్లుగా బొమ్మగీశాం. కాని నిజానికి G




త్రిభుజం వెలుపల (45 వ బొమ్మ) ఆ త్రిభుజం యొక్క **పరిగత వృత్తం** (Circumscribed Circle) మీద ఉంటుంది. అంతే కాదు. G నుంచి గీసిన GD అనే లంబరేఖ పొడిగించిన CA భుజం మీదనూ, GF అనే లంబరేఖ C B మీద C కి B కి మధ్యలో పడుతుంది.

ఇదివరలో రుజువు చేసినట్లే ఇప్పుడు కూడా CGD, CGF అనే త్రిభుజములు సర్వసమానములే కనుక CD = CF —(1)

మళ్ళీ GDA, GFB అనే త్రిభుజములు కూడా సర్వసమానములే.

కనుక DA = FB —(2)

ఇదివరలోలాగే

$$CB = CF + FB$$

కానీ CA = CD − DA

(అంతేకాని CD + DA కాదు.)

కనుక CA, CB లు సమానం కాదు.

కనుక CAB అనేది సమద్విబాహు త్రిభుజం కాదు.

* * *

# 31. లెక్కల పేపరు

లెక్కలు అంటే చాలా భయపడిపోయే ఒక పిల్ల లెక్కల పరీక్ష అయాక సంతోషంగా ఇంటికి తిరిగి వచ్చింది. పేపరు వ్రాసిందని ఆ ముఖమే చెబుతోంది. వాళ్ళనాన్న ప్రశ్నల పేపరు తీసుకుని, ఏయే లెక్కలు ఎల్లా చేసిందో, ఎన్ని రైటు అయాయో చూస్తున్నాడు.

"టిక్కులు పెట్టినవన్నీ రైటు చేసేశాను నాన్నా! పాసైపోతాను" అంది ఉత్సాహంగా.

"రైటు అని నీకు ఎలాతెలుసూ?" అని అడిగేడు వాళ్ళనాన్న.

"ఆన్సర్లు సరిగ్గా సరిపోయాయి నాన్నా! మా క్లాసులో మామూలుగా ఫస్టు మార్కు వచ్చే అమ్మాయికి వచ్చిన ఆన్సర్లే నాకూ వచ్చాయి."

అయినా నమ్మకంలేక ఒక్కొక్క లెక్కనే అమ్మాయి ఎల్లా చేసిందో వివరంగా అడిగి తెలుసుకున్నాడు వాళ్ళనాన్న. సరియైన ఆన్సరు వచ్చిందని ఆ పిల్ల ధీమాగా చెబుతున్న ప్రశ్నలు మాత్రమే ఇక్కడ చూపిస్తున్నాను.

తనకు వచ్చిన జవాబులు రైటే నంటోంది కదా, మరి మీరేమంటారో చూద్దాం.

## 1 వ ప్రశ్న

ఈ క్రింది భిన్నములను సూక్ష్మీకరించునది.

(a) $\frac{26}{65}$, (b) $\frac{19}{95}$, (c) $\frac{49}{98}$, (d) $\frac{16}{64}$

దీనికి ఆ పిల్ల వ్రాసిన జవాబు ఇదీ:

అడ్డంగీతకి పైన ఉన్న 6 నీ కిందనున్న 6 నీ కొట్టేసి,

$\frac{2\not{6}}{\not{6}5} = \frac{2}{5}$ అని వ్రాసింది.

ఇల్లాగే మిగిలిన భిన్నములను కూడా సూక్ష్మీకరించింది.

$\frac{1\not{6}}{\not{6}5} = \frac{1}{5}$

$\frac{4\not{9}}{\not{9}8} = \frac{4}{8}$

$\frac{1\not{6}}{\not{6}4} = \frac{1}{4}$

లెక్కల మేష్టారు ఈ జవాబులు రైటే అన్నారు: రైటే కదా మరి?

## 2 వ ప్రశ్న

$\frac{a^2 - b^2}{a - b} = ?$

జ వా బు :

అడ్డగీతకి పైనున్న $a^2$ ని కిందనున్న a పెట్టి భాగించి a అని వ్రాసింది. అల్లాగే పైనున్న $b^2$ ని కిందనున్న b పెట్టి భాగించి b అని వ్రాసింది.

గీతకి పైనున్న మైనస్‌ని కిందనున్న మైనస్‌చే భాగించి + అని వ్రాసింది.

కనుక

$$\frac{a^2 - b^2}{a - b} = a + b$$

అని వ్రాసింది: అన్సరు రైటే కదా మరి?

## 3 వ ప్రశ్న

$\frac{(1 + x^2)}{(1 - x^2)}$ ని సూక్ష్మీకరించుము.

జవాబు :

అడ్డగీతకి పైనున్న 22 నీ, కిందనున్న 2 నీ కొట్టేసి $\frac{(1 + x)}{(1 - x)}$

అని వ్రాసింది:

ఈ అన్సరు కూడా రైటే కదా?

## 4 వ ప్రశ్న

ఈ క్రింది సమీకరణములను సాధించునది.

$$\frac{x - 2}{y - 1} = \frac{3}{5} \; ; \text{ మరియు } \frac{x - 1}{y - 2} = 1$$

జవాబు :

ఆ పిల్ల రెండవ సమీకరణం జోలికి పోకుండా మొదటి సమీకరణాన్ని మాత్రమే ఉపయోగించి, x, y ల విలువలను ఈ క్రింది విధంగా సాధించింది:

$$\frac{x - 2}{y - 1} = \frac{3}{5}$$

కనుక $\frac{x}{y} - \frac{2}{1} = \frac{3}{5}$

కనుక $\frac{x}{y} = \frac{2}{1} + \frac{3}{5}$

కనుక $\frac{x}{y} = \frac{2+3}{1+5} = \frac{5}{6}$

కనుక $x = 5$

$y = 6$

అసలు లెక్కలో ఇచ్చిన రెండు సమీకరణాలనూ మీరు సాధించి చూడండి; x, y లకు సరిగ్గా ఇవే విలువలు వస్తాయి.

ఆన్సర్ రైటే కదా?

## 5 వ ప్రశ్న

PO=OQ, మరియు $\frac{OR}{OQ} = \frac{OQ}{QS}$ ఆగునట్లుగా ఒక సరళరేఖపై P, O, R, Q, S అను బిందువులు గుర్తింపబడినవి.

$\frac{PR}{RQ} = \frac{PS}{QS}$ అని ఋజువు చేయుము.

ఆ పిల్ల ఈ సమస్యను సునాయాసంగా ఈ క్రింది విధంగా సాధించింది:

$\frac{PR}{RQ}$ అనే భిన్నంలో గీతకు పైన ఒక R ఉంది. కింద ఒక R ఉంది.

ఈ రెండింటినీ కొట్టివేయగా $\frac{P}{Q}$ మిగులుతుంది.

అల్లాగే $\frac{PS}{QS}$ అనే భిన్నంలో పైనా క్రిందా ఉన్న S లను కొట్టివేస్తే $\frac{P}{Q}$ మిగులుతుంది.

$\frac{P}{Q} = \frac{P}{Q}$

కనుక $\frac{PR}{RQ} = \frac{PS}{QS}$

## 6 వ ప్రశ్న

అంటే $2^5 . 9^2$ సూక్ష్మీకరింపుము?

జ వా బు :

2కి నెత్తిమీద ఉన్న 5 ను తీసి పక్కని వ్రాసింది. అల్లాగే 9 నెత్తి మీద ఉన్న 2ని తీసి పక్కని వ్రాసింది.

$2^5.9^2=2592$

ఈ ఆన్సరు రైటే కదా?

## 7వ ప్రశ్న

$\frac{2^3,\ 4^8,\ 16^{-n}}{16^2;\ 4^{-2n}}$ సూక్ష్మీకరించుము.

జ వా బు :

$$\frac{2^3.\ 4^8.\ 16^{-n}}{16^2.\ 4^{-2n}} = \frac{(2+4+16)\ ^{(3+8-n)}}{(16+4)^{(2-2n)}}$$

$$= \frac{22^{(11-n)}}{20^{(2-2n)}}$$

$$= \frac{22^{(11-n)}}{20^{-n}}$$

$$= 22^{(11-n)}\ _20^{n}$$

$$= (22_20)^{(11-n+n)}$$

$$= 2^{11}$$

ఈ ఆన్సర్ కరెక్టే!

## 8 వ ప్రశ్న

ఈ క్రింది సమీకరణమును సాధించుము.

$$(5_3x)\ (7_2x) = (11_6x)\ (3_x)$$

$$\therefore\quad 5_3x + 7_2x = 11_6x + 3_x$$

$$\therefore\quad 12_5x = 14_7x$$

$$\therefore\quad 2x = 2$$

$$\therefore\quad x = 2$$

ఈ అన్సర్ సరిగ్గానే ఉంది కదా?

**9 వ ప్రశ్న**

ఈ క్రింది సమీకరణమును సాధింపుము.

$$x^2 + (x + 4)^2 = (x + 36)^2$$
$$\therefore x^2 + x^2 + 4^2 = x^2 + 36^2$$
$$\therefore x^2 + x^2 + 16 = x^2 + 3 \times 6^2$$
$$\therefore x^2 + x^2 + 16 = x^2 + 336$$
$$\therefore x^2 + x^2 - x^2 = 336 - 16$$
$$\therefore x^4 = 320$$
$$\therefore x = \frac{320}{4} = 80$$

ఈ ఆన్సర్ సరిగ్గానే ఉంది కదా?

ఇచ్చిన 12 ప్రశ్నలలో 9 ప్రశ్నలకు సరియైన జవాబులు వ్రాశానని ఆ పిల్ల సంబరపడిపోతూ ఉంటే ఆమె లెక్కలు చేసిన పద్ధతి చూసి ఆ తండ్రి జావ కారిపోయాడు.

# 32. వీలునామా

గిరిపురం జమీందారుకి జబ్బు నానాటికీ ఎక్కువై పోతోంది. తానింక ఎంతోకాలం బతకనని అతడికి కూడా అర్థమైపోయింది. ఎంతకాలం నుంచో పిల్లలకోసం కలవరించిపోతున్న ఆ దంపతులకు త్వరలో ఓ నలుసు పుట్ట బోతోంది. ఆ బిడ్డను ఎత్తుకుని ముద్దాడే అదృష్టం తనకు లేదని విచారించాడు జమీందారు. అంతలో ఏదో జ్ఞాపకం వచ్చి. వెంటనే వకీలుని పిలిపించి, తన వీలునామా వ్రాయించాడు.

"మగపిల్లవాడు పుడితే నా ఎస్టేటులో రెండువంతులు నా కుమారుడికీ, ఒక వంతు నా భార్యకీ చెందాలి. ఆడపిల్ల కనక పుడితే ఒక వంతు నా కూతురికి, మూడువంతులు నా భార్యకూ చెందాలి."

ఇది జరిగిన కొద్దిరోజులకే జమీందారు చనిపోయాడు. మరో రెండు నెలలకి అతని భార్య కవలపిల్లలను ప్రసవించింది : ఒక ఆడపిల్ల, ఒక మగ పిల్లవాడూనూ.

ఇప్పుడు ఏం చెయ్యాలి? జమీందారు వ్రాసిన విల్లులో కవల పిల్లలు పుడితే ఏం చెయ్యాలో తెలుపలేదు. ఆ ముగ్గురికి ఎస్టేటును ఏ విధంగా పంచడం న్యాయం ?

దీనికి కోర్టు ఏమంటుందో నాకు తెలియదు. కానీ, జమీందారు తన విల్లులో ప్రకటించిన కోరికకు అనుగుణంగా పంపకాలు చేయడం సాధ్యమే.

తన ఆస్తిని కొడుకుకి, భార్యకి 2:1 నిష్పత్తిలోనూ, కూతురికీ భార్యకి 1:3 నిష్పత్తిలోనూ పంచాలని ఆ జమీందారు అభిమతంగా కనిపిస్తోంది. ఎస్టేటులో $\frac{6}{10}$ వ వంతు కొడుకుకీ, $\frac{3}{10}$ వ వంతు భార్యకీ, $\frac{1}{10}$ వ వంతు కూతురికీ పంచితే, ఆయన కోరిన నిష్పత్తిలో పంచినట్లే అవుతుంది. ఆ జమీందారు బతికి ఉంటే ఇలాగే చేసి ఉండేవాడేమో!

చిత్రమైన వీలునామా సమస్య మరి ఒకటి ఉంది.

ఒక అరబ్బు వర్తకుడు చనిపోయే ముందు తన ఆస్తిలో సగం పెద్ద కొడుక్కీ, మూడవవంతు రెండవ కొడుక్కీ, తొమ్మిదవ వంతు మూడవ కొడుక్కీ చెందాలని విల్లు వ్రాశాడు. అతడి దగ్గర మిగిలివున్న ఆస్తి అంతా పోగుచేస్తే 17 గుర్రాలు మాత్రమే, ఆ విల్లులో ఉన్నట్లు పంచుకుంటే-

మొదటి కొడుక్కి $8\frac{1}{2}$ గుర్రాలు.

రెండవ కొడుక్కి $5\frac{2}{3}$ గుర్రాలు.

మూడవ కొడుక్కి $1\frac{8}{9}$ గుర్రాలు.

వస్తాయి కాని, గుర్రంలో కొంత కొంత భాగాలను పంచుకోవడం ఎల్లా సాధ్యమో వాళ్ళకు తెలియలేదు. మూడు గుర్రాలను ముక్కలకింద నరికి, ఆ భాగాలను పంచుకుని, పులావు వండుకోవడం తప్ప మార్గాంతరం కనిపించక, తర్జన భజనలు చేశారు. కిందా మీదా పడ్డారు. ఈ చిక్కువీడే మార్గం కనబడక ఆ ఊరిపెద్దను సలహా అడిగేరు.

ఆ ఊరిపెద్ద దీర్ఘంగా ఆలోచించాడు. అంతలో మెరుపులా చక్కని ఊహ స్ఫురించింది. తాను ఎక్కి వచ్చిన పంచకళ్యాణిని ఆ 17 గుర్రాలతోనూ కలిపేశాడు. మొత్తం 18 గుర్రాలనూ ఆ విల్లులో వ్రాసినట్లు పంచేశాడు.

పెద్దకొడుక్కి 18లో సగం 9 గుర్రాలు వచ్చాయి. రెండోకొడుక్కి 18లో 3వంతు 6 గుర్రాలు వచ్చాయి. మూడోకొడుక్కి 18లో 9 వ వంతు 2 గుర్రాలు వచ్చాయి.

ఇంక ఒక గుర్రం మిగిలింది. అదే ఆ ఊరిపెద్ద ఎక్కి వచ్చిన పంచకళ్యాణి. తన గుర్రాన్ని తాను తీసుకుని ఆయన ఇంటికి వెళ్ళిపోయాడు.

ఆ వర్తకుడి కొడుకులలో ప్రతివాడికీ రావలసిన దానికన్న వాటా కాస్త

అధికంగానే వచ్చింది. మూడు గుర్రాలను చంపి ముక్కలు పంచుకోవలసిన బెడద తప్పిపోయింది. పైగా ఊరిపెద్దకు నష్టం ఏమీ లేదు; ఆయన గుర్రం ఆయన దగ్గరే ఉంది!

ఈ గారడీ చూసిన వారంతా ముక్కులమీద వేళ్ళు వేసుకున్నారు.

అయితే, విల్లులో వ్రాసినదానికన్న ఆ ముగ్గురు కొడుకులకి వాటాలు అధికంగా ముట్టేయికదా, ఆ అధికభాగం ఎక్కడి నుంచి వచ్చిందో చెప్ప గలరా?

జ వా బు :

దీనికి ఒక్కటే సమాధానం. ఆ విల్లు వ్రాసిన వర్తకుడికి లెక్కలు సరిగ్గారావు! తనకున్న ఆస్తినంతా పిల్లలకు పంచి ఇవ్వలేదు అతడు. వాళ్ళకు రావలసిన భాగాలు కూడితే.

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} = \frac{17}{18} \text{ వస్తుంది}$$

అంటే తన ఆస్తిలో $\frac{17}{18}$వ వంతును మాత్రమే పిల్లలకు వ్రాసి ఇచ్చాడు.

మిగిలిన $\frac{1}{18}$ వ వంతు భాగాన్ని ఏం చెయ్యాలో చెప్పలేదు. ఆ ముగ్గురు కొడుకులకూ అదనంగా వచ్చిన అశ్వభాగాలను కూడితే అతని ఆస్తిలో $\frac{1}{18}$ వ వంతుకి సమానం అవుతుంది. అంటే తండ్రి తన విల్లులో వ్రాయడం మరచిపోయిన భాగాన్నే ఆ ముగ్గురు కొడుకులూ పంచుకున్నారు. అది కొత్తగా ఎక్కడి నుండో వచ్చినది కాదు.

ఇదే రకపు తమాషాను 17 గుర్రాలకు బదులు 19 గుర్రాలతో కూడా ఊహించవచ్చు. పంచుకోవలసిన భాగాలు $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$. ఇప్పుడు కూడా మరో గుర్రాన్ని అదనంగా తెచ్చి, 20 గుర్రాలను చేస్తే ముగ్గురు కొడుకులకూ 10, 5, 4 గుర్రాలు వస్తాయి. అదనంగా తెచ్చిన గుర్రం మిగిలిపోతుంది. ఇదివరలో లాగే $\frac{19}{20}$ వ వంతు ఆస్తి మాత్రమే విల్లులో వ్రాసి ఉంది. మిగిలిపోయిన $\frac{1}{20}$ వ వంతును ఏమిచెయ్యాలో చెప్పలేదు.

ఇటువంటి సమస్యనే 23 గుర్రాలతో కూడా ఊహించవచ్చు. ముగ్గురు కొడుకులూ $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{8}$ భాగాలు పంచుకోవాలి? ఈ విల్లులో $\frac{23}{24}$ వ వంతును మాత్రమే పంచాలని ఉంది. వీటికి ఒక గుర్రాన్ని అదనంగా చేర్చి, ముగ్గురికీ 12, 8, 3 గుర్రాలు పంచవచ్చు.

ఇటువంటి చిత్రమైన పంపకాలకు సరిపోయే సంఖ్యలు ఇంకా ఏమైనా ఉన్నాయేమో వెతకండి చూద్దాం.

*　　　*　　　*

# 33. గోలకొండ గుర్తులు

ఎలిమెంటరీ స్కూలులో చరిత్రపాఠం నడుస్తోంది. బహమనీ సామ్రాజ్యం బిజాపూరు, బీదరు, బీరారు, అహమ్మద్‌నగరు, గోలకొండ అనే అయిదు చిన్న చిన్న రాజ్యాలుగా చీలిపోయింది అని మేష్టారు పాఠం చెబుతున్నారు. ఇది పరీక్షలలో వచ్చే ముఖ్యమైన అంశం కనుక ఆ పేరు జ్ఞాపకం పెట్టుకోవడానికి తంటాలుపడుతున్నాం. మేష్టారు మా అవస్థ కనిపెట్టి, వాటిని గుర్తుంచుకోడానికి సులువైన మార్గం ఉపదేశించారు.

"BAG అనే ఇంగ్లీషుమాట గుర్తుంచుకోండి చాలు. B అనేది బిజాపూరు, బీదరు, బీరారు అనే మూడింటికీ గుర్తు. A అహమ్మదు నగరుకి, G గోలకొండకి గుర్తు."

ఇది జరిగి ఇరవై సంవత్సరాలు కావస్తోంది. నాకు చరిత్రతో సంబంధం పోయి చాలాకాలమైపోయింది. అయినాసరే ఇప్పటికీ సంచినీ చూస్తే ఈ అయిదు రాజ్యాలపేర్లు గుర్తుకు వస్తాయి.

ఇటువంటి చిత్రమైన కొండగుర్తులు, (లేక గోలకొండ గుర్తులు అందామా?) ప్రతివారూ ఉపయోగిస్తూనే ఉంటారు. ఈ పద్ధతివల్ల బహు క్లిష్ట మైన విషయాలను చాలా సునాయాసంగా గుర్తుంచుకోవచ్చు.

మరొక్క ఉదాహరణ:

ఆకాశంలో కనబడే అనంత నక్షత్ర సముదాయాన్ని ఉష్ణోగ్రతనుబట్టి (లేదా వర్ణమాలను బట్టి) వేరు వేరు తరగతులుగా విభజించారు. ఖగోళ శాస్త్రజ్ఞులు. ఆ తరగతులకు O - B - A - F - G - K - M - R - N - S

అని వరుసగా గుర్తులు పెట్టుకున్నారు. వీటిని ఈ వరసలో జ్ఞాపకం పెట్టుకో డానికి చక్కని సంకేతవాక్యం తయారుచేసుకున్నారు.

Oh Be A Fine Girl Kiss Me Right Now Smack.

ఇందులోని ప్రతీమాటలోని మొదటి అక్షరాన్ని తీసుకుంటే నక్షత్రాల తరగతులు వరుసగా వస్తాయి. యువకులెవ్వరూ ఈ వాక్యాన్ని మరిచిపోరు.

ఇంకొక ఉదాహరణ :

ఎలక్ట్రానిక్ కాంపొనెంట్స్ తాలూకు విలువలను సూచించడానికి అంకెలకు బదులుగా రంగులను ఈ క్రింది వరుసలో ఉపయోగించే సంప్రదాయం ఉంది:

Black - 0

Brown - 1

Red - 2

Orange - 3

Yellow - 4

Green - 5

Blue - 6

Violet - 7

Gray - 8

White - 9

ఈ పదిరకాల రంగులనూ, వాటి విలువలనూ గుర్తుంచుకోడానికి ఒక వాక్యాన్ని తయారు చేశారు.

Black Boys Roll Only Young Girls But Violet Goes Willingly.

ఇటువంటి గోలకొండ గుర్తులు అంకెలకుకూడా అవసరమే. భౌతిక గణితశాస్త్రాలలో $\theta$, $\pi$ అనే గుర్తులను తరుచు వాడుతూ ఉంటారు. వీటి విలువలను గుర్తుంచుకోవడం చాలా కష్టం. అవి శాస్త్రగ్రంథాలలో దొరుకుతాయి గానీ, అవసరమైనప్పుడల్లా పుస్తకాలు వెతకడం చాలా ఇబ్బంది. కనుక అంకెలను ఒక వరుసలో గుర్తుంచుకునే పద్ధతి ఏదైనా సృష్టించగలిగితే బాగుంటుందికదూ?

తెలుగులోని అక్షరాలకు కొన్ని ప్రత్యేకమైన విలువలు ఇచ్చి, ఆ అక్షరాలతో మాటలు తయారుచేసి, గుర్తుంచుకోవడం చాలా సులభం. దీనికోసమై నాకు తోచిన సంకేత పద్ధతిని ఇక్కడ వ్రాస్తున్నాను. ఇది కనుక నలుగురికీ నచ్చితే దానిని సానబట్టి, ఇంకా అభివృద్ధి చేసుకోవచ్చు.

| అక్షరాలు | వాటి విలువలు | వాటిని గుర్తుంచుకోడానికి చిట్కాలు |
|---|---|---|
| క-ఖ-గ-ఘ | ఒకటి | ఇది మొదటివర్గం.'ఒకటి'లో 'క' ఉంది కనుక 'క' వర్గానికి గుర్తు |
| చ-ఛ-జ-ఝ-ఞ | రెండు | ఇది రెండో వర్గం |
| ట-ఠ-డ-ఢ | మూడు | ఇది మూడో వర్గం |
| త-థ-ద-ధ | నాలుగు | ఇది నాలుగో వర్గం |
| ప-ఫ-బ-భ | ఐదు | ఇది ఐదో వర్గం. పాంచ్ అంటే 5. పాంచ్‌లో 'ప' ఉంది కనుక ఇది 'ప' వర్గానికి గుర్తు |
| య - ర | ఆరు | 'య ర' లో 'ఆరు' ధ్వనివల్ల సూచితం |
| ల - వ | ఏడు | 'లవ్'కి పర్యవసానం 'ఏడుపు' కనుక 'ల - వ'లు ఏడుకి గుర్తు. |
| శ - ష - స | ఎనిమిది | 'అష్ట'లో 'ష' ఉంది |
| మ - ణ - న | తొమ్మిది | 'తొమ్మిది'లో 'మ' ఉంది 'నవ'లో 'న' ఉంది. |
| హ - ళ - క్ష | సున్న | 'హుళక్కి' అంటే సున్న. ఇందులో 'హ-ళ'లు ఉన్నాయి. |

వరా : సంయుక్తాక్షరాలుంటే మొదటి హల్లుకే విలువ నివ్వాలి.

అచ్చులకు విలువలు లేవు.

గుణింతాలతో పనిలేదు. అంటే క, కా, కి, కు, కూ.....లలో ఏ అక్షరమున్నా దాని విలువ ఒకటి మాత్రమే.

ఉదాహరణకి : "సర్వజ్ఞ సింగభూపాలుడు" అనేమాట తీసుకుందాం. ఇందులోని అక్షరాలకు వరుసగా విలువలిస్తే 8 6 2 8 1 5 5 7 3 వస్తుంది.

తరుచు వాడుకునే సంజ్ఞల విలువలు అక్షరాలరూపంలో ఎల్లా ఇవ్వవచ్చునో ఉదాహరణలు ఇస్తాను.

(1) $\pi = 3, 141\ 592\ 6535$.......

ఇక్కడ "పై" విలువను పది దశాంశస్థానాల వరకూ మాత్రమే వ్రాశాను. నిజానికి ఈ దశాంశస్థానాలు అనంతం. మామూలుగా పది దశాంశ స్థానాలపైన ఉపయోగించవలసిన అవసరం ఉండదు. నిత్యవ్యవహారంలో మొదటి మూడుస్థానాలే చాలు. ఈ పదకొండు అంకెలనూ వరుసగా గుర్తుంచుకోవడానికి

"టీ కి దాకా ప్రాణాచారం పడ్డేపై"

అనే వాక్యాన్ని గుర్తుంచుకుంటేచాలు. మొదటి అంకె తరవాత, దశాంశ బిందువు ఉన్నదని వేరే చెప్పనక్కరలేదు. అవసరమైనప్పుడు ఇందులోని అక్షరాలకు బదులు వాటి విలువలు వరుసగా వ్రాసుకోవాలి.

(2). 'పై' తరువాత తరచుగా వాడుకునే 'ఇ'

ఇ = 2,718281828. ..

ఇది కూడా అనంత దశాంశస్థానాలు కలదే.

'ఈ జ ల కా ష్ఠ చ ష క ం'

అనే మాటను గుర్తుంచుకుంటే 2,718281 వరకూ గుర్తుంటుంది. అటు తరవాత 828 అనే అంకెలు పునరావృత్తం అవుతున్నాయని గమనించే ఉంటారు. ఇది గుర్తుంచుకుంటే తొమ్మిది దశాంశ స్థానాలవరకూ వ్రాయవచ్చు.

(3) మైలుకి కిలోమీటర్లు 1,609.

ఇది తరచు అవసరమయే సంఖ్య. దీనిని "గరళమే" అనే నాలుగు అక్షరాల మాటతో జ్ఞాపకం ఉంచుకోవచ్చు. గరళం పాములో ఉంటుంది. పాము పొడుగ్గా ఉంటుంది. పొడుగుకి కొలత మైళ్లూ, కిలోమీటర్లూనూ. 'గరళమే' అన్న మాటను మైళ్ళతో కలపడానికి ఇది విలక్షణమైన దారి. ఈ దారి ఎంత విలక్షణమైతే అంత బాగా గుర్తుంటుంది.

(4) $\sqrt{2} = 1,414213.$

"గా దె కి ం ద జ గ డ ం"

వర్గమూలపుగుర్తు గాదె ఆకారంలో ఉన్నదనీ, దానికింద రెండు ఎలుకలు జగడమాడుకుంటున్నాయనీ ఊహించుకుంటే ఈ మాట త్వరగా గుర్తుకు వస్తుంది.

(5) రసాయన శాస్త్రంలో తరచు "ఎవగాడ్రో స్థిరాంకం" అనేది వాడబడుతూ ఉంటుంది. దీని విలువ $6.019 \times 10^{23}$.

"ఎవగాడ్రో యక్షగానంలో చోటు" అనే వాక్యాన్ని గుర్తుంచుకోవచ్చు. ఇందులో "ఎవగాడ్రో" అనేది సంబంధాన్ని తెలియజేయడానికేగాని ఈ అక్షరాలకు విలువలు లేవు.

యక్షగానం = 6 019

చోటు = 23

"లో" అనేది పదియొక్క ధనఘాతాంకాన్ని సూచిస్తుంది.

"తో" అనేది పదియొక్క ఋణఘాతాంకాన్ని సూచిస్తుంది.

(6) ప్లాంక్ స్థిరాంకం = $6.62 \times 10^{-27}$

"ప్లాంక్ రారాజుతో చెల్మి"

ఇక్కడ ప్లాంక్ అనేది సంబంధాన్ని సూచిస్తుంది.

రారాజు = 6.62

తో = పదియొక్క ఋణఘాతాంకం.

చెల్మి = 27

ఈ విధంగా ఏశాఖలో పనిచేసేవారు ఆ శాఖలో తరుచు వాడుకునే సంఖ్యలను ఈ విధంగా అక్షరాలలోకి మార్చి సులభంగా గుర్తుంచుకోవచ్చు.

ఈ గోలకొండ గుర్తులకు మరో ఉపయోగం కూడా ఉంది. అష్టావధానం చేసేవారు పృచ్ఛకులు అప్పుడూ అప్పుడూ ఇచ్చిన అనేక సంఖ్యలను గుర్తుంచుకుని అవధానాంతంలో వరుసగా చెప్పడం ఒక ప్రక్రియగా పెట్టుకోవడం కద్దు. అవధానులు తమ తీక్షణమైన ధారణశక్తితో ఈ పని నిర్వహిస్తారు కాబోలు! సరదాకి దీనిని అభ్యాసం చేయదలచినవారు ఈ గోలకొండ గుర్తులతో డజన్ల కొద్దీ అంకెలను సులభంగా గుర్తుంచుకోవచ్చు! పృచ్ఛకుడు ఒక్కొక్కసారి రెండేసి అంకెల చొప్పున ఇవ్వాలని నియమం పెట్టుకో. ఇచ్చిన రెండు అంకెలనూ ఏదో ఒక మాటలోకి మార్చి గుర్తుంచుకో. ఆ మాటలు రెండు అక్షరాలవిగాని, అంతకన్న పెద్దవిగానీ అయి ఉండవచ్చు. కాని మొదటి రెండు అక్షరాలకే విలువ లివ్వాలి.

ఉదాహరణకి : 97 – 58 – 21 – 62 – 46 – 91 – 17 – 13 – 91 – 18......అనే అంకెలు ఇచ్చారు అనుకుందాం.

"నల్ల - పిశాచాన్ని - చీకట్లో - రాచ - దయ్యం - మింగితే - కాలువ. గట్టున - నక్కలు , కూశాయి......." అని మాటలుగా వాక్యాలుగా తయారు చేయవచ్చు. వాక్యాలకు అర్థం ఉండనవసరం లేదు. గుర్తుంచుకోవడానికి వీలుగా ఉంటే చాలు. కొంతకాలంపాటు అభ్యాసం చేస్తే మాటలు వేగంగా స్ఫురిస్తాయి. ప్రయత్నించి చూడండి.

*　　*　　*

# 34. ఫలానా తేదీ ఏ వారం?

అష్టావధానులు సాధారణంగా పృచ్ఛకులు అడిగిన తేదీ ఏ వారం అయిందో చెప్పే పనిని తాము ఏక కాలంలో చేసే ఎనిమిది పనులలోనూ

ఒకటిగా పెట్టుకుంటూ ఉంటారు. ప్రేక్షకులకు ఈ పని చాలా ఆశ్చర్యకరంగా కనిపించినప్పటికీ అవధానికి ఇది విశేషంగా శ్రమ కలిగించే సమస్యమాత్రం కాదు.

అడిగిన తేదీ ఏ వారమైందో చెప్పే పద్ధతులు చాలానే ప్రచారంలో ఉన్నాయి. వాటి అన్నిటిలోనూ ముఖ్యమైన తేదీల వారాలు. గుర్తుపెట్టుకోవలసి ఉంటుంది. లీపు సంవత్సరం కాకపోతే జనవరి ఒకటోతేది ఏ వారం అయిందో డిసెంబరు 31 కూడా అదే వారం అవుతుంది. మరో చమత్కారం కూడా ఉంది. 1-1-1961 ఆదివారం, 1 - 1 - 1962 సోమవారం, 1 - 1 - 1963 మంగళవారం, 1 - 1 - 1964 బుధవారం ఈ విధంగా జనవరి ఒకటో తేదీ ఏడాదికి ఒక్కొక్క "వారం" చొప్పున ఎదరకు జరుగుతుంది. అదే లీపు సంవత్సరం తరవాత అయితే మధ్యలో ఒక వారం విడిచి తరువాతి వారానికి గంతు వేస్తుంది. ఉదాహరణకి : 1-1-1964 బుధవారం అయితే 1-1-1965 శుక్రవారం అవుతుంది.

ఇటువంటి కొంద గుర్తులతో ఫలానా తేదీ ఏ వారం అయిందో చెప్పే పద్ధతులు కొన్ని ఉన్నాయి. కాని, నేనిప్పుడు చెప్పబోయే పద్ధతి వీటన్నిటికన్న తేలికైనదీ, విలక్షణమైనదీనూ, ఈ పద్ధతిలో ముఖ్యమైన తేదీలవారాలు ఏవీ గుర్తుంచుకో నక్కరలేదు. ఈ పద్ధతి ఉపయోగించి ఏ శతాబ్దంలో ఏ తేదీ ఇచ్చినా సరే - అది ఏ వారమైందో ఒక్క నిమిషంలో నోటిని గుణించి చెప్పవచ్చు.

ఈ పద్ధతిని ఉపయోగించి ముందర మన ఇరవయ్యో శతాబ్దంలో ఏ తేదీ ఇచ్చినా అది ఏ వారం అయిందో చెప్పడం ఎల్లాగో వివరిస్తాను. తరవాత ఇతర శతాబ్దాలలో తేదీ అయితే ఏమి చెయ్యాలో చూపిస్తాను.

ఉదాహరణకి : 1997 అగస్టు 15 వ తేదీ (అప్పటికి మనకి స్వతంత్రం వచ్చి 50 ఏళ్ళు అవుతుంది) ఏ వారం అయిందో చూద్దాం ఇది తెలుసుకోడానికి ఈ క్రింది నాలుగు సంఖ్యలూ కూడాలి.

(1) సంవత్సర సంఖ్యలో వేల స్థానాన్ని, వందల స్థానాన్ని వదిలేసి, మిగిలిన చివరి రెండు అంకెల సంఖ్య (1997 వ సంవత్సరానికి అయితే 97 అనే సంఖ్య)

(2) ఈ సంవత్సరం సంఖ్యలో నాలుగవ వంతు (శేషంతో మనకి పనిలేదు) ఉదాహరణకి 97 ÷ 4 = 24.

(3) అడిగిన నెల యొక్క విలువ.

జనవరి నుండి డిసెంబరు వరకు గల 12 నెలలకూ వివిధమైన రహస్యపు విలువలు ఉన్నాయి. వీటిని ఈ పట్టికలో చూపించాను.

| | | | |
|---|---|---|---|
| జనవరి | = 0 | జూలై | = 6 |
| ఫిబ్రవరి | = 3 | ఆగస్టు | = 2 |
| మార్చి | = 3 | సెప్టెంబరు | = 5 |
| ఏప్రిల్ | = 6 | అక్టోబరు | = 0 |
| మే | = 1 | నవంబరు | = 3 |
| జూన్ | = 4 | డిశంబరు | = 0 |

(ఈ సమస్యలో అతి ముఖ్యమైన ఈ అంకెలను గుర్తుంచుకునే పద్ధతి తరవాత చెబుతాను.)

ఈ పట్టికలో చూస్తే మనకు కావలసిన ఆగస్టు నెలకి విలువ 2 అని తెలుస్తుంది.

(4) అడిగిన తేదీ.

మన లెక్కలలో ఇది 15

ఇప్పుడు ఈ నాలుగు సంఖ్యలనూ కూడాలి.

97 సంవత్సర సంఖ్య

24 సంవత్సర సంఖ్యలో నాలుగోవంతు

2 నెల విలువ

15 తేదీ

138 మొత్తం

ఈ మొత్తాన్ని 7చే భాగిస్తే ఎంత శేషం మిగులుతుందో తెలుసుకోవాలి. ఈ శేషం

0 అయితే — ఆదివారం

1 అయితే — సోమవారం

2 అయితే — మంగళవారం

3 అయితే — బుధవారం

4 అయితే — గురువారం

5 అయితే — శుక్రవారం

6 అయితే — శనివారం

మన ఉదాహరణలో 138 ని 7 చే భాగిస్తే 5 శేషం మిగులుతుంది. కనుక 15.8.1997 వ తేదీ శుక్రవారం అవుతుంది!

ఇందులో చేయవలసినదల్లా నెలల విలువలు గుర్తుంచుకోవడం. (కాగితం మీద వ్రాసుకుని చూస్తే మజా లేదుగా) దానికోసం ఎవరికి తోచిన పద్ధతిని వారు అవలంబించవచ్చు. నామటుక్కి నేను ఈ క్రింది పద్ధతిలో గుర్తుంచుకుంటాను.

(0) "జనక్టోబరు సున్న" (అంటే జనవరి, అక్టోబరులు సున్న)
(1) "మేడే ఒకటి" (మే ఒకటోతేదీ ప్రపంచ శ్రామికుల పర్వదినం)
(2) "ద్వాగస్టు" (ఆగస్టు విలువ రెండు)
(3) "ఫిమాన మూడు" (అంటే ఫిబ్రవరి, మార్చి, నవంబరుల విలువలు మూడు. మూడింటికి కలిపి ఒకే విలువ ఉన్నది వీటికి మాత్రమే. పైగా ఆ విలువ మూడు)
(4) "జూన్నాలుగు" (అంటే జూన్ విలువ నాలుగు)
(5) "సెడిసెంబరు ఐదు" (అంటే సెప్టెంబరు,డిసెంబరుల విలువ ఐదు)
(6) "జూలేప్రిల్ ఆరు" (అంటే జూలై, ఏప్రిల్ నెలల విలువ ఆరు)

ఇంతకన్న మంచిపద్ధతి మీకుతోస్తే మహారాజులా అవలంబించవచ్చు.

నాలుగు పెద్ద సంఖ్యలను మనస్సులోనే కూడడమూ, ఆ మొత్తాన్ని 7చే భాగించడమూ కష్టం అనిపిస్తే మరో పని చెయ్యవచ్చు. ఎక్కడికక్కడ 7 చే భాగించి, శేషంమాత్రమే కలుపుతూ పోవచ్చు. మన ఉదాహరణలో 97ని 7చే భాగిస్తే 6 శేషం మిగులుతుంది. ఈ 6 ని 24 కి కలిపితే 30, మళ్ళీ 30ని 7చే భాగిస్తే 2 మిగులుతుంది.

$2+2+15=19$. దీనిని 7చే భాగిస్తే 5 శేషం మిగులుతుంది.

మరొక ముఖ్యమైన గమనిక ఉంది. లీపు సంవత్సరంలో జనవరి 1 వ తేదీనుంచి, ఫిబ్రవరి 29 వరకూ గల ఏ తేదీ అయినా ఇస్తే, పైన చెప్పిన నాలుగు అంకెల మొత్తంలో నుంచి ఒకటి తీసివెయ్యాలి.

ఉదాహరణకి : 13-2-1984 వ తేదీ ఏ వారం?

| | |
|---|---|
| 84 | సంవత్సర సంఖ్య |
| 21 | సంవత్సర సంఖ్యలో నాలుగోవంతు |
| 3 | నెల విలువ |
| 13 | తేదీ |
| 121 | మొత్తం |
| - 1 | (జనవరి 1కి ఫిబ్రవరి 29కి మధ్యనున్న తేదీ కనుక) |
| 120 | |

దీనిని 7చే భాగిస్తే శేషం 1 మిగులుతుంది.

కనుక అది సోమవారం.

ఇంతవరకూ చెప్పినది 20 వ శతాబ్దానికి మాత్రమే నప్పుతుంది.

మిగిలిన శతాబ్దాలకైతే "శతాబ్ది విలువ" కూడా కలపవలసి ఉంటుంది. ప్రస్తుతం ప్రపంచమంతటా ఉపయోగంలో ఉన్న "గ్రిగోరియన్ కేలండరు" ప్రకారం 400 చే నిశ్శేషంగా భాగించబడని 1700, 1800, 1900 వంటి శతాబ్ద సంవత్సరాలు లీపు సంవత్సరాలు కాదు అనీ, 400 చే నిశ్శేషంగా భాగింపబడే 400, 800, 1200, 1500, 2000, 2400 వంటి శతాబ్ద సంవత్సరాలు లీపు సంవత్సరాలనీ గుర్తుంచుకోవాలి. పూర్వం ఒకప్పుడు వాడుకలో ఉన్న "జూలియన్ కేలండరు" ప్రకారం అయితే శతాబ్ద సంఖ్యలు అన్నీ లీపు సంవత్సరాలుగానే పరిగణింపబడేవి.*

ఈ వ్యాసంలో నేను చూపిస్తున్న "తేదీ-వారం" లెక్కలు కేవలం గ్రిగోరియన్ కేలండరుకి మాత్రమే వర్తిస్తాయి అని గుర్తుంచుకోవాలి పూర్వం జూలియన్ కేలండరుకి అమలులో ఉన్న కాలంలో తేదీలకు వేసిన వారాలు ఈ లెక్కలతో సరిపోవు అని గమనించాలి.

శతాబ్దపు విలువలు ఇక్కడ ఇస్తున్నాను.

| శతాబ్దం - విలువ | శతాబ్దం - విలువ | శతాబ్దం - విలువ |
|---|---|---|
| 24 - 0 | 16 - 0 | 8 - 0 |
| 23 - 2 | 15 - 2 | 7 - 2 |
| 22 - 2 | 14 - 4 | 6 - 4 |
| 21 - 4 | 13 - 0 | 5 - 6 |
| 20 - 6 | 12 - 0 | 4 - 0 |
| 19 - 2 | 11 - 2 | 3 - 2 |
| 18 - 4 | 10 - 4 | 2 - 4 |
| 17 - 6 | 9 - 6 | 1 - 6 |

ఒక ఉదాహరణ చూపిస్తాము.

---

* జూలియన్ కేలండరు నుంచి గ్రిగోరియన్ కేలండరుకి మారడం అనేది వివిధ దేశాలలో వివిధ కాలాలలో జరిగింది. అసలు ఈ మార్పు ఎందుకు జరపవలసి వచ్చిందో, దానికి ఎంతెంత రాద్ధాంతం జరిగిందో తెలుసు కోదలచినవారు నా "కేలండరు కథ" చదువవచ్చు.

14.9.1752 వ తేదీ ఏ వారం?

52 సంవత్సర సంఖ్య
13 నాలుగోవంతు
 5 నెల విలువ
14 తేదీ
 4 శతాబ్దపు విలువ (18 వ శతాబ్దం)

88 మొత్తం.

దీనిని 7 చే భాగిస్తే శేషం 4 వస్తుంది. కనుక అది గురువారం.

ఇందులో ఒక చమత్కారం ఉంది. ఈ తేదీనే నేను ఉదాహరణంగా తీసుకోవడానికి కారణం ఏమిటంటే, ఇంగ్లండులో అంతవరకూ అమలులో ఉన్న జూలియన్ కేలండరును తొలగించి 14.9.1752 వ తేదీని గ్రిగోరియన్ కేలండరుని అమలుపరచారు. అసాధారణ సంచలనానికి దారితీసిన ఆ 1752.

1752 సెప్టెంబరు 1752

| ఆది | సోమ | మంగళ | బుధ | గురు | శుక్ర | శని |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | 1 | 2 | 14 | 15 | 26 |
| 17 | 18 | 19 | 20 | 21 | 22 | 23 |
| 24 | 25 | 26 | 27 | 28 | 29 | 30 |

ఆ సంవత్సరం ఆ నెలలో 2 వ తేదీ తరవాత 14 వ తేదీ ఉండడం గమనించారు కదూ? మధ్యలో ఉండవలసిన 11 రోజులు మాయమైపోయాయి! ఈ రెండు రకాల కేలెండర్లకూ గల భేదం అది.

* * *

## 35. ఈగ - సాలీడు

అనగా అనగా ఒక సాలీడు.

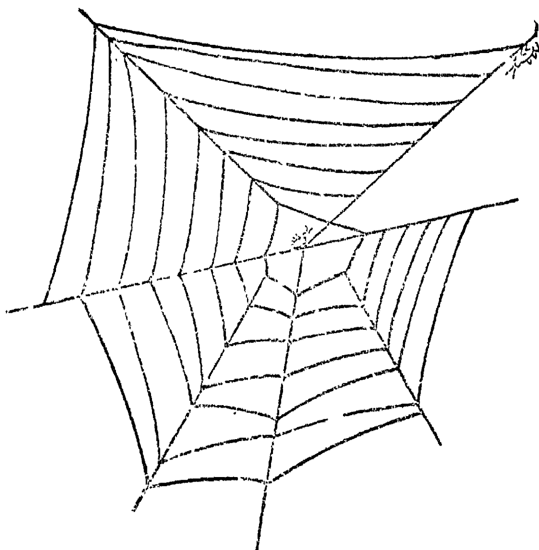
అది (ఇక్కడి బొమ్మలో చూపినట్టు) చక్కని గూడు అల్లుకుని ఒక మూల దాంకుని చూస్తోంది.

కొంత సేపటికి ఒక ఈగ ఎగురుకుంటూ వచ్చి, ఆ గూటికి సరిగా మధ్యలో చిక్కుకుంది.

ఈగ తన వెండి గూట్లో చిక్కుకున్న అలికిడి అయి సాలీడు తాను దాంకున్న చోటినుంచి బయటికి వచ్చింది. ఈగకేసి సంతోషంగా, కసిగా చూసింది. ఈగ సాలీడును చూసి గజగజా వణికిపోయింది.

మామూలు అన్ని సాలీళ్ళలాగా ఈ సాలీడు చకచకా తిన్నగా ఈగ దగ్గరకు వెళ్ళి, దాన్ని పొడిచి చంపెయ్యలేదు. పొట్టనిండుగా ఉండి, ఆకలి కాస్త మందంగా ఉండడంచేత వెంటనే వెళ్ళి ఈగను పట్టి చంపడం అనవసరం అనిపించింది. ఈగను కాస్త వీడిపించాలనుకుంది.

సాలీడు తాను (బొమ్మలో ప్రస్తుతం) ఉన్న చోటి నుంచి దారప్పోగు మీదుగా గబగబా ఈగవైపు నడిచి, దారపుముడి అడ్డు వచ్చిన చోట



ఆగింది. తన వైపుగా వస్తున్న సాలీడును చూసి ప్రాణాలమీద ఆశవదులుకున్న ఈగ అంతలో సాలీడు ఆగిపోవడం చూసి, కొత్త ఆశలు చిగురించగా తప్పించుకు పారిపోదామని ప్రయత్నించింది. ఆ గూటినుంచి పూర్తిగా బయట

పడడం సాధ్యం కాలేదు కానీ. దారం వెంబడే గిజాయించుకుంటూ నడువ గలిగింది; మరో దారపుముడి అడ్డం వచ్చేవరకూనూ.

అంతలో సాలీడు మళ్ళీ కదిలి తరువాతి దారపుముడిదాకా వచ్చి ఆగింది. సాలీడు ఆగేక ఈగ మళ్ళీ నడిచి తరువాతి దారపుముడిని చేరుకుంది.

ఈ విధంగా ఒకసారి సాలీడు, తరవాత ఈగ ఆ దారాల వెంట నడవ సాగేయి. ఒక దారపు ముడినుంచి తరువాతి దారపుముడి దాకా నడవడం ఒక 'ఎత్తు' కింద లెక్క. ఈ బొమ్మనే పెద్దదిగా గీసి, సాలీడుకి బదులు పెద్ద గవ్వనూ, ఈగకి బదులు ఒక చింత గింజనూ ఉపయోగించి ఇద్దరు వ్యక్తులు ఈ ఆట ఆడవచ్చు. మొట్టమొదటిగా ఎత్తు వేయవలసినది సాలీడు. ఈగ తప్పించుకుపోవాలని ప్రయత్నిస్తుంది. సాలీడు దానిని ఎలాగైనాసరే పట్టుకోవాలని ప్రయత్నిస్తుంది.

పైన చెప్పిన నియమాలను అనుసరిస్తూ ఎత్తులువేస్తే ఈగ ఎప్పటికైనా సాలీడుకి దొరుకుతుందా? లేదా?

బహు జాగ్రత్తగా గమనించి ఆడితే ఈగ దొరికిపోతుంది. కాని, అది అంత సులభమేమీ కాదు.

ప్రయత్నించండి.

జ వా బు :

ఈ ఆటలో ఒక చిన్న కిటుకు ఉంది. అది తెలుసుకోకుండా ఎంతసేపు ఆడినా ఈగ పట్టుబడదు.

చతుర్భుజంలో ఓ మూల బిందువుల దగ్గర ఈగ, సాలీడు నిలుచుని ఉన్నాయనుకుందాం. అప్పుడు ముందు ఎత్తు వేయవలసినది సాలీడు అయితే ఈగ దొరకకుండా ఆ చతుర్భుజం చుట్టూ ఎంత సేపైనా తిరుగుతూ ఉండ గలదు.—ముందు ఎత్తు వేయవలసినది ఈగ అయితే సాలీడు దానిని తరువాతి ఎత్తులోనే పట్టివేయగలదు. ముందర ఈ కిటుకు అర్థం చేసుకోవాలి.

ఆట మొదట్లో సాలీడుకి 8 బిందువుల దూరంలో ఈగ నిలుచుని ఉంది. 8 సరిసంఖ్య. ఇప్పుడు ఎత్తు వేయవలసినది సాలీడు.

బొమ్మ (గూడు) అంతా చతుర్భుజములతోనే నిండి ఉంటే సాలీడు ఎప్పటికీ ఈగను పట్టుకోలేకపోవును. ఇది పైన చెప్పిన చతుర్భుజముల చుట్టూ గిరగిరా తిరగడం వంటిదే. కాని, సాలీడుకి ఒక్క ఆశాకిరణం మిగిలివుంది. బొమ్మలో ఒకేఒక త్రిభుజం కూడా ఉంది చూశారుకదూ? ఈ త్రిభుజాన్ని ఉపయోగించుకుని ఈగ సాలీడుకి సరిసంఖ్య బిందువుల దూరంలో ఉన్నప్పుడు ఎత్తు వేయవలసినది ఈగ అయ్యేటట్లు చేయవచ్చు. అప్పుడు సాలీడు విధిగా

నెగ్గుతుంది. దీనినే మరోలా చెప్పాలంటే - ఎత్తు వేయవలసినది సాలీడు అయితే, ఈగ బేసి సంఖ్య బిందువుల దూరంలో ఉన్నట్టయితే సాలీడు నెగ్గుతుంది. ఎత్తు వెయ్యవలసినది ఈగ అయినప్పుడు, ఈగ సరిసంఖ్య బిందువుల దూరంలో ఉన్నప్పుడు కూడా సాలీడు నెగ్గుతుంది.

బొమ్మలో ఉన్న త్రిభుజాన్ని ఉపయోగించుకుని తనకు అనుకూలంగా లేని ఆటను సాలీడు సర్దిద్దుకోవాలి; ఈ పని కోసమై ముందర హుటాహుటిగా సాలీడు త్రిభుజాన్ని చేరుకోవాలి. ఆ త్రిభుజాన్ని చుట్టివస్తే పరిస్థితి తారుమారు అవుతుంది. అప్పుడు సరిసంఖ్య బిందువుల దూరంలో ఉన్నప్పుడు ఎత్తు వేయవలసినది ఈగ అవుతుంది. ఇంక అక్కడినుంచి సాలీడు తిన్నగా ఈగ వైపు దండెత్తిపోయి, కొద్ది ఎత్తులలోనే పట్టివేయగలుగుతుంది.

ఈ కిటుకు ఈగకు తెలిసినప్పటికీ సాలీడు చేతిలో దానికి దాపుతప్పదు.

ఈ ఆటను ఇంకా రకరకాలుగా తయారు చేయవచ్చు. బొమ్మలో త్రిభుజానికి బదులు పంచభుజి, సప్తభుజి వంటి బేసి భుజములు గల ఆకృతిని గీయవచ్చు వాటి సంఖ్య ఒకటికన్న అధికంగా ఉండవచ్చు ఈగకూ సాలీడుకి కూడా ఈ బేసి భుజాల చుట్టూ తిరిగే అవకాశాలు కల్పించవచ్చు. ఈ బేసి భుజాల చుట్టూ ఇన్నిసార్లకన్న అధికంగా తిరగకూడదన్న నియమం పెట్టుకోవచ్చు.

ఈ సిద్ధాంతాన్ని ఆధారంగా చేసుకుని రకరకాల సమస్యలూ, ఆటలూ తయారు చేయవచ్చు.

* * *

# 36. శేషావధానం

"అష్టావధానం, శతావధానం, సహస్రావధానం, నేత్రావధానం, వగైరాలు విన్నాంగానీ, ఈ శేషావధానం ఏమిటో ఎప్పుడూ వినలేదే!"

"ఎప్పుడూ వినలేదా? అయితే మరీ మంచిది. 1001 లోపున ఏదో ఒక సంఖ్య తలచుకో. దానిని 7 చేత, 11 చేత, 13 చేత వేరువేరుగా భాగించి ఎంతెంత శేషాలు మిగిలాయో చెబితే నువ్వు తలచుకున్న సంఖ్య చెబుతాను."

శేషం ఎంత వచ్చిందో చెబితే తలుచుకున్న సంఖ్యను తెలుసుకోవడం నిజంగా అపూర్వమే.

"సరే తలుచుకున్నాను.

7 చే భాగిస్తే 4

11 చే భాగిస్తే 5

13 చే భాగిస్తే 6

శేషాలు మిగిలేయి."

"అయితే నువ్వు తలుచుకున్నది 214."

"ఎల్లా తెలిసింది?"

ఈ గారడీ కొంచెం కష్టమైనది. కాగితమూ, కలమూ ఉంటే కాని నడవకపోవచ్చు. కానీ, చాలా ఆశ్చర్యకరంగానూ, దుర్భేద్యంగానూ ఉంటుంది.

మాటవరసకి 7 చే భాగించగా వచ్చిన శేషం "క" అనీ, 11 చే భాగించగా వచ్చిన శేషం "చ" అనీ, 13 చే భాగించగా వచ్చిన శేషం "ట అనీ అనుకుందాం.

ఇప్పుడు

(715 × క + 364 × చ + 924 × ట) అనే సంఖ్యని 1001 చే భాగించగా వచ్చిన శేషమే నువ్వు తలుచుకున్న సంఖ్య.

పైన చెప్పిన ఉదాహరణలో

క = 4

చ = 5

ట = 6

కనుక

715 × 4 + 364 × 5 + 924 × 6 = 10,224. దీనిని 1001 చే భాగిస్తే 214 శేషం మిగులుతుంది. ఇదే నీవు తలుచుకున్న సంఖ్య.

దీనికే ఇంకా ఎన్నెన్నో పాఠాంతరాలు తయారు చేయవచ్చు.

II 990కి లోపున ఏదో సంఖ్య తలుచుకో. దానిని 9, 10, 11 లచే వేరు వేరుగా భాగిస్తే క,చ,ట అనేవి వరుసగా శేషములు అనుకుందాం. అప్పుడు

(550 × క + 891 × చ + 540 × ట) అనే సంఖ్యని 990 చే భాగించంగా వచ్చిన శేషమే తలుచుకున్న సంఖ్య.

III ఇంతింత పెద్దసంఖ్యలు ఉపయోగించి గుణకార భాగహారాలు చేయడం తలనొప్పి అనుకునేవారి సౌలభ్యంకోసం మరో పాఠాంతరం ఉంది.

60 లోపున ఏదో ఒక సంఖ్య తలుచుకో. దానిని 3, 4, 5 లచే వేరు వేరుగా భాగించగా మిగిలిన శేషములు వరుసగా క, చ, ట అనుకుందాం.

అప్పుడు

(40 × క + 45 × చ + 36 × ట) అనే సంఖ్యని 60 చే భాగించగా మిగిలిన శేషమే తలుచుకున్న సంఖ్య.

ఈ గారడీని కేవలం మూడు అంకెలతోనే కాదు, అనేక విభాజకాలు ఉపయోగించికూడా చేయవచ్చు. దీనికొక పరిమితి అంటూ లేదు. కాని, విభాజకాలను బట్టి ఈ గారడీలో వాడే సంఖ్యలు మారుతూ ఉంటాయి.

"అసలు ఈ అంకెలన్నీ ఎల్లా వచ్చాయి? ఈ గారడీకి ప్రాతిపదిక ఏమిటి?" అని తెలుసుకోగోరే వారికోసం మరికొంత వివరణ వ్రాస్తాను

మొట్ట మొదటగా "సామాన్య భాజకములు" (Common Factors) లేని సంఖ్యలు మూడుగాని, నాలుగుగాని.... ఇంకా ఎక్కువగానీ ఎన్నుకోవాలి. వీటిని గ, జ, డ.... అందాం.

మొదటి ఉదాహరణలో 7, 11, 13 అనే సంఖ్యలను ఎన్నుకున్నాం. వీటిలో పోయే సామాన్య భాజకం ఏదీలేదు (ఒకటి తప్ప).

ఈ సంఖ్యల లబ్ధమును "ల" అనే అక్షరంతో సూచిద్దాం.

ల = 7 × 11 × 13 = 1001

ఈ 1001 కి లోపున ఏ సంఖ్యను తలుచుకున్నా ఈ గారడీ తప్పుతుంది.

తలుచుకున్న సంఖ్యను "గ, జ, డ" లతో భాగించగా వరుసగా "క, చ, ట" లు శేషములు మిగిలాయి అనుకుందాం.

వచ్చిన శేషాలను 715; 364; 914 అనే పెద్ద సంఖ్యలచే వరుసగా గుణించాలని చెప్పుకున్నాం కదూ? ఈ సంఖ్యలకి "అ; ఇ; ఉ" అని పేర్లు పెడదాం. అప్పుడు

(అ × క + ఇ × చ + ఉ × ట) అనే సంఖ్యని (గ × జ × డ) అనే సంఖ్యచే భాగించగా వచ్చిన శేషమే తలుచుకున్న సంఖ్య అవుతుంది.

అయితే మరి "అ, ఇ, ఉ" అనే సంఖ్యలను వెతికి పట్టుకోవడం ఎల్లాగ?

"జ, డ"ల లబ్ధానికి కొన్నిరెట్లు ఉండే "అ" అనే సంఖ్యని వెతకాలి. "అ" అనేది ఇంకా ఎల్లా ఉండాలంటే దీనిని "గ" చేత భాగిస్తే "ఒకటి" శేషం మిగలాలి.

మొదటి ఉదాహరణలో అ = 715. ఇది 11 × 13 కి 5 రెట్లు. దీనిని 7 చే భాగిస్తే ఒకటి శేషం మిగులుతుంది.

అల్లాగే గ × డ కి కొన్ని రెట్లుండేదీ, "జ"తో భాగిస్తే ఒకటి శేషం మిగిలేదీ "ఇ" అనే సంఖ్యను వెతకాలి. (ఇది 364).

అల్లాగే గ × జ కి కొన్ని రెట్లుండేదీ. "డ"తో భాగిస్తే ఒకటి శేషం మిగిలేదీ "ఉ" అనే సంఖ్యను వెతకాలి. (ఇది 924).

ఈ విధమైన లక్షణాలు కలిగిన అ, ఇ, ఉ అనే సంఖ్యలను వెతికి పట్టుకున్న తరవాత ఇంక తలుచుకున్న సంఖ్యను నిర్ణయించడం ఎంతసేపు?

"అ, ఇ, ఉ'' లకు ఈ లక్షణాలే ఎందుకుండాలి? వీటిని వరుసగా "క, చ, ట'' లతో గుణించి, కూడాలి. ఆ మొత్తాన్ని "గ × జ × డ'' తో

ఎందుకు భాగించాలి? భాగించగా మిగిలిన శేషమే తలుచుకున్న సంఖ్య ఎందుకు అవుతుంది?

ఈ ప్రశ్నలకు ఈ వ్యాసంలో సమాధానాలు ఇవ్వడం సాధ్యం కాదు. “థియరీ ఆఫ్ నంబర్స్” అనే ఉన్నత గణితశాఖలో ప్రవేశం ఉంటే తప్ప ఇవి అర్థం కావు

# 37. అంకెలలో ఓఘాయిత్యం

ఈ క్రింది సంఖ్యలు ఎంత తమాషాగా ఉన్నాయో చూడండి.

(క) $1+2+6=4+5$

$1^2+2^2+6^2=4^2+5^2$

మొదటి సమీకరణంలో వింత ఏమీలేదు.

$1+2+6=$ అల్లాగే $4+5=9$

వాటి వర్గముల మొత్తములు (Sums of the squares) కూడా సమానంగానే ఉంటడం చిత్రం కదూ?

(చ) మరొక ఉదాహరణ చూద్దాం.

$1+5+8+12=2+3+10+11$

$1^2+5^2+8^2+12^2=2^2+3^2+10^2+11^2$

$1^3+5^3+8^3+12^3=2^3+3^3+10^3+11^3$

ఇందులో వర్గముల మొత్తములే కాకుండా ఘనముల మొత్తములు కూడా సమానంగానే ఉన్నాయి.

(ట) ఒకటవ, రెండవ, మూడవ, నాలుగవ ఘాతముల మొత్తములు సమానములు అయే ఈ క్రింది సంఖ్యలు చూడండి:

$1+4+7+8+15+17+18=2+3+5+12+13+16+19$

$1^2+4^2+7^2+8^2+15^2+17^2+18^2=$
$2^2+3^2+5^2+12^2+13^2+16^2+19^2$

$1^3+4^3+7^3+8^3+15^3+17^3+18^3=$
$2^3+3^3+5^3+12^3+13^3+16^3+19^3$

$1^4+4^4+7^4+8^4+15^4+17^4+18^4=$
$2^4+3^4+5^4+12^4+13^4+18^4+19^4$

(త) ఈ క్రింది సంఖ్యలు 5 ఘాతముల వరకూ సమాన ధర్మాన్ని పాటిస్తున్నాయి చూడండి:

$$1+4+7+9+10+17+18+20+23+26$$
$$=2+3+5+11+13+14+16+22+24+25$$

ఈ విధంగా ఎన్ని ఘాతములవరకూ కావాలంటే అన్ని ఘాతముల వరకూ ఈ విధమైన సమాన ధర్మములను పాటించే సంఖ్యలను కనుక్కోడానికి సులభమైన పద్ధతులున్నాయి.

మొట్టమొదట ఈ క్రింది సమానత్వాన్ని వ్రాద్దాం.

$$1+11=5+7 \qquad -(1)$$

ఎడమవైపు రెండు అంకెల మొత్తం $=12$

కుడివైపు రెండు అంకెల మొత్తం $=12$

ఇలా వ్రాయడంలో కష్టమేమీ లేదుకదా?

ఈ సమీకరణం మొదటి ఘాతంలోనే సరిపోతుంది కానీ రెండవ, మూడవ, నాలుగవ...., ఘాతములతో సరిపోదు. కాని 1 వ సమీకరణాన్ని ఉపయోగించి రెండవ ఘాతం వరకూ సరిపోయే సరికొత్త సమీకరణాన్ని తయారుచేయవచ్చు. ఈ పనికోసం x అనే చిన్న సంఖ్యను ఎన్నుకుందాం.

x విలువ 1, 2, 3, 4.... ఏదైనా కావచ్చు.

1 వ సమీకరణాన్ని మార్చి, x ఉపయోగించి ఈ క్రింది విధంగా వ్రాద్దాం.

$$1+11+(5+x)+(7+x)=5+7+(1+x)+(11+x)$$

ఈ సమీకరణంలో x కి ఏ విలువ ఇచ్చినా సరిపోతుంది. ఒక్కొక్క విలువకి ఒక్కొక్క కొత్త సమీకరణం ఏర్పడుతుంది.

ఉదాహరణకి : $x=1$ అనుకుందాం. అప్పుడు పై సమీకరణాన్ని ఇలా వ్రాయవచ్చు:

$$1+11+(5+1)+(7+1)=5+7+(1+1)+(11+1)$$

లేక $1+6+8+11=2+5+7+12 \qquad -(2)$

ఈ విధంగా ఏర్పడ్డ 2 వ సమీకరణం రెండవ ఘాతం వరకూ సమాన ధర్మాన్ని కలిగి ఉంటుంది.

$$1^2+6^2+8^2+11^2 = 2^2+5^2+7^2+12^2$$

2 వ సమీకరణాన్ని ఉపయోగించి, x కి తోచిన విలువ ఏదో ఒకటి ఇచ్చి, పై విధంగానే వ్రాసి, మూడవ ఘాతం వరకూ సరిపోయే కొత్త సమీకరణాన్ని తయారుచేయవచ్చు. ఉదాహరణకి $x = 2$ అనుకుందాం. అప్పుడు

$$1+6+8+11+(2+2)+(5+2)+(7+2)+(12+2)$$
$$=2+5+7+12+(1+2)+(6+2)+(8+2)+(11+2)$$

లేక $1+6+8+11+4+7+9+14$
$$=2+5+7+11+3+8+10+13$$

ఇందులో కుడివైపున ఎడమవైపున కూడా ఉన్న సమాన సంఖ్యలను కొట్టివెయ్యాలి. రెండువైపులా 8, 7లు ఉన్నాయి. వీటిని కొట్టివేసి మిగిలిన సంఖ్యలను వ్రాద్దాం.

$$1+4+6+9+11+14=2+3+5+10+12+13 \quad (3)$$

ఈ 3వ సమీకరణం 1, 2, 3 ఘాతముల వరకూ సమాన ధర్మాన్ని కలిగి ఉంటుంది. అంటే-

$$1^2+4^2+6^2+11^2+14^2=2^2+3^2+5^2+0^2+12^2+13^2$$
$$1^3+4^3+6^3+9^3+11^3+14^3=2^3+3^3+5^3+10^3+12^3+13^3$$

(3)వ సమీకరణాన్ని ఉపయోగించి, x కి తోచిన మరియొక విలువ నిచ్చి, పైవిధంగానే చేసి, 4వ ఘాతంవరకూ సమాన ధర్మాన్ని ప్రదర్శించే కొత్త సమీకరణాన్ని తయారుచేయవచ్చు. ఉదాహరణకి $x=5$ అనుకుందాం అప్పుడు-

$$1+4+6+9+11+14+(2+5)+(3+5)+(5+5)+(10+5)+(12+5)+(13+5)$$
$$=2+3+5+10+12+13+(1+5)+(4+5)+(6+5)+(9+5)+(4+5)+(14+5)$$

దీనిలో కుడివైపునా ఎడమవైపునా సరిసమానంగా ఉన్న సంఖ్యలను కొట్టివేసి, ఇల్లా వ్రాయవచ్చు:

$$1+4+7+8+15+17+18$$
$$=2+3+5+12+13+16+19 \quad — \quad (4)$$

1, 2, 3, 4 ఘాతములలో సమాన ధర్మాన్ని ప్రదర్శించే ఈ 4వ సమీకరణాన్నే ఈ వ్యాసం మొదట్లో ఉదాహరణగా (ట) ఇచ్చాను.

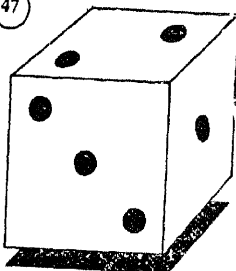
4వ సమీకరణంతో బయలుదేరి, $x=7$ అనుకుని పైవిధంగానే చేస్తే 1, 2, 3, 4, 5 మాతముల వరకూ సమాన ధర్మం కలిగిన సమీకరణం (ఈ వ్యాసంలో ఉదాహరించినదే) వస్తుంది.

దీనికి అంతులేదు. మాతములను ఒక్కొక్కటిగా పెంచుకుంటూ ఎంతవరకూ కావాలన్నా వెళ్ళవచ్చు.

# 38. పాచికతో వ్యప్పొఒకటి

ఆరు ముఖాలు కలిగిన పాచిక (Dice) తో ఆడదగ్గ ఈ ఆట చేయి తిరిగిన జూదగాళ్ళను కూడా ఒక ఊపు ఊపగలదు.

ముందర పాచిక అంటే ఏమిటో (తెలియని వాళ్ళకోసం) చెప్తాను. ఘన (cube) ఆకారంలో ప్లాస్టిక్కుతో గానీ, కొమ్ముతోగానీ, కర్రతోగాని చేసిన ముక్క ఇది. దీనికి ఆరుముఖాలు ఉంటాయని వేరే చెప్పనక్కరలేదు.




ఆ ముఖాల (47 బొమ్మ) మీద 1, 2, 3, 4, 5, 6 సంఖ్యలలో చిన్న చిన్న లొత్తలు ఉంటాయి. 6 లొత్తలున్న ముఖానికి అవతలి ముఖంమీద 1 లొత్త ఉంటుంది. 5 లొత్తలున్న ముఖానికి అవతలి ముఖంమీద 2 లొత్తలు, 4 లొత్తలున్న ముఖానికి అవతలి ముఖంమీద 3 లొత్తలు ఉంటాయి. అంటే ఎదురెదురు ముఖాలజంట మీది లొత్తలు కూడితే 7 వస్తుంది.

$1+6=7$
$2+5=7$
$3+4=7$

స్థూలంగా పాచిక అంటే ఇది. దీనిని గిలకరించి నేలమీద వేస్తారు. పైకి (ఆకాశం వైపు) ఉన్న ముఖంమీది లొత్తల సంఖ్య ముఖ్యమైనది.

ఇటువంటి పాచికతో ఇద్దరు వ్యక్తులు 31 అనే ఆట ఆడవచ్చు. ఆటగాళ్ళ తెలివిని ఈ ఆట ఎలా పరీక్షిస్తుందో ముందు ముందు చూద్దాం.

ముందర పాచికను గిలకరించి నేలమీద వేయగా పైనున్న ముఖంమీది లొత్తల సంఖ్యతో ఆట మొదలుపెడతారు. తరవాత ఆటగాళ్ళు ఇద్దరూ ఒకరి తరువాత ఒకరుగా ఆ పాచికను మరొక ముఖం పైకి వచ్చేటట్లు (90°

కోణం మాత్రమే) తిప్పుతారు. ఆవిధంగా తిప్పగా వచ్చిన పై ముఖం మీది లొత్తల సంఖ్యను మొదటి సంఖ్యను కలుపుతూ పోతారు.

ఈ మొత్తం ముందుగా ఎవరు 31కి సమానం చేస్తారో వారు (లేదా ఎదుటివాడు పాచికను తిప్పినప్పుడు మొత్తం 31ని దాటిపోతే గాని) ఆట నెగ్గినట్లు పరిగణించాలి.

ఈ ఆటలో ప్రతి ఎత్తులోనూ ఏవో రెండు సంఖ్యలు ఆటగాడికి అందుబాటులో లేకుండా ఉంటాయి. ఉదాహరణకి : ఇక్కడ చూపిన బొమ్మలో పాచిక పై ముఖంమీద ఉన్న 2, దానికి అభిముఖంగా ఉన్న 5 అనే అంకె ఆటగాడికి అందుబాటులో ఉండవు; మిగిలిన 3, 4, 1, 6 అనే అంకెలు గల ముఖాలలో ఏదైనా సరే పైకి తిప్పే అవకాశం ఆటగాడికి ఉంది. ఈ అవకాశాన్ని ఆటగాడు జాగ్రత్తగా ఉపయోగించుకుని విజయం సాధించాలి.

పాచికను గిలకరించి వేసినప్పుడు యాదృచ్ఛికంగా పైకి వచ్చిన ముఖం మీది లొత్తల సంఖ్యనుబట్టే ఆటగాళ్ళ జయాపజయాలు ఆధారపడి ఉంటాయా? ఏ సంఖ్య పైకివస్తే మొదటి ఆటగాడు నెగ్గుతాడు? ఓడించాలంటే ఎల్లా ఆడాలి? అదృష్టం కలిసి రాకపోయినా అవతలి వ్యక్తిని ముప్పతిప్పలు పెట్టే పద్ధతులు ఏమిటి? ఈ ప్రశ్నలకు సమాధానాలు వెతుక్కొని, ఈ ఆట ఆడి చూడండి.

జవాబు :

ఈ ఆటలోని కిటుకు "మూలాంకముల" మీద ఆధారపడి ఉంది సంఖ్యలోని విడివిడి అంకెలన్నీ కూడితే వచ్చే మొత్తమునే మూలాంకం అంటారని "పంతుళ్ళకి సలహాలు" అనే వ్యాసంలో దెలుసుకున్నాం.

31 యొక్క మూలాంకం $3+1=4$

1 నుంచి 31 వరకూ గల సంఖ్యలలో 4 మూలాంకంగా గలవి 4, 13, 22, 31 మాత్రమే. ఈ సంఖ్యలను ముందర చేరుకున్నవాడు నెగ్గుతాడు. ఒకసారి ఈ అంకెలలో ఒకదానిని చేరుకున్నాక విడిచిపెట్టకుండా ఒక మెట్టు తరవాత ఒక మెట్టుగా పైకివెళ్ళాలి.

ఈ నాలుగు సంఖ్యలలో పక్కపక్క సంఖ్యలభేదం తొమ్మిది.

$31 - 22 = 9;\ 22 - 13 = 9;\ 13 - 4 = 9$

ఒకసారి ఈ సంఖ్యలలో ఒక దానిని చేరుకున్నవాడు 1 కానీ, 2 కానీ కలిపి ప్రత్యర్థికి ఆట వదలాలి. అప్పుడు ప్రత్యర్థి తరువాతి "జయసంఖ్య"ను చేరుకోలేడు.

అయితే ప్రత్యర్థి దిగాలుపడి పోనక్కరలేదు. జయసంఖ్య తనకి దొరకక పోతేపోయింది, ఎదుటి వ్యక్తికికూడా దొరకకుండా శ్రేయడానికి ప్రయత్నించాలి. అదెలా చేయడం?

ఎల్లప్పుడూ ఏవో ఒకరెండు సంఖ్యలు అలభ్యంగా ఉండిపోతాయని చెప్పుకున్నాం కదా? ఈ రెండిటిలో ఏదో ఒకటి కలిపితేకాని జయసంఖ్య ప్రత్యర్థికి దొరకకుండేటట్లు ఎత్తు వెయ్యాలి.

ఉదాహరణకు : 4 అనే సంఖ్యకు ఆటగాడు 1 గాని. 2 గాని కలిపి మొత్తం 5 గాని, 6 గాని చేసి నీకు అందించాడనుకో. నీవు ఎల్లాగూ 13 ను చేరుకోలేవు. కనుక 9 ని (లేదా 9 మూలాంకంగా గల 18 గానీ, 27 గానీ) చేరుకునేలాగ 4 గానీ, 3 గానీ కలుపు. అప్పుడు నీ ప్రత్యర్థి తరువాతి జయ సంఖ్యను చేరుకోడానికి అవసరమైన 4 అలభ్యం కనుక అతడు తరువాతి జయ సంఖ్యను చేరుకోలేడు. అంటే చేయవలసిందేమిటంటే - 6 గాని, 4 గాని కలిపి మూలాంకం 9గా గల సంఖ్యను చేరుకోవాలి.

తరువాతి ఆటగాడు 9 కి 2 కలిపి 11 చేశాడనుకుందాం. 11 యొక్క మూలాంకం 2. తరువాతి ఆటగాడు 13 ను చేరుకోలేడు. ఏమంటే- 2 అలభ్యం కనుక. అల్లాగే 18 నీ చేరుకోలేడు. ఏమంటే, 7 అనే సంఖ్య పాచిక మీద లేదు కనుక.

అప్పుడు అతడు ఏం చెయ్యాలి? ప్రత్యర్థి మూలాంకం 4 గానీ; 9 గానీ చేరుకోలేకుండా చెయ్యాలి. దానికోసం 3 కలిపి మూలాంకం 5 చెయ్యాలి. అప్పుడు ప్రత్యర్థి మూలాంకం 9 ని చేరుకోలేడు. ఏమంటే- 4 అలభ్యం కనుక.

ఈ విధంగా తర్కించుకుంటూ వెడితే 4 మూలాంకంగా గల జయ సంఖ్యలకు తోడుగా ఈ క్రింది అష్టధర్మాలను అవలంబించవచ్చు.

(1) 3 గాని, 4 గాని కలిపి మూలాంకం 1 గాని, 5 గాని, 9 గాని చేరుకోవాలి.

(2) 2 గాని, 5 గాని కలిపి మూలాంకం 8 ని చేరుకోవాలి.

(3) 2, 3, 6, 7 మూలాంకములుగా గల సంఖ్యలను చేరుకుంటే ఓటమి తప్పదు.

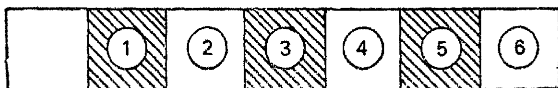
(4) జయం తప్పకుండా లభింపడం మొదట్లో 4 ను చేరుకున్నవాడికే.

## 39. కప్పగంతులు

48 వ బొమ్మలో ఏడు గదులలో ఆరు కప్పలు కూర్చుని ఉన్నాయి. వాటి నడ్డిమీద గుర్తుకోసం 1, 2, 3, 4, 5, 6 అని అంకెలు వేసి ఉన్నాయి. ఖాళీగా ఉన్న పక్కజాగాలోకి గాని, ఒక కప్ప మీదుగా ఎగిరి ఖాళీగా ఉన్న

తరవాత గదికిగానీ ఈ కప్పలు వెళ్ళగలవు. ఉదాహరణకు 1 వ కప్ప ఎడమ పక్కని కాళీ గదిలోకి వెళ్ళగలదు; లేహ 2 వ కప్ప మీదుగా ఎగిరి అవతల

48




ఉన్న కాళీగదిని ఆక్రమించగలదు. కప్పలు ఎడమకుగాని, కుడికిగాని ఎగుర వచ్చు.

ఇప్పుడు చేయవలసిన దేమిటంటే ఈ ఆరు కప్పలూ ఎడమ చివర గదిలో మొదలుపెట్టి 6, 5, 4, 3, 2, 1 అనే క్రమంలో సర్దుకోవాలి. సాధ్య మైనన్ని తక్కువ గంతులలో ఈ మార్పును తీసుకురావడం ఎల్లాగ?

జ వా బు :

ఈ క్రింద వ్రాసిన క్రమంలో కప్పలచేత 21 సార్లు గంతులు వేయించాలి.

2 - 4 - 6 - 5 - 3 - 1 - 2 - 4 - 6 - 5 - 3. 1 - 2 - 4 - 6 - 5 - 3
1 - 2 - 4 - 6

ఈ సమస్యలో కప్పలు 6 మాత్రమే కాదు. ఎన్ని ఉన్నప్పటికి ఈ విధమైన మార్పు తీసుకురావడానికి అవకాశం ఉంది. దీనికి సామాన్యసూత్రం తెలిస్తే, అతిసులభంగా అవసరమైన మార్పులు చేయవచ్చు. కప్పలు సరి సంఖ్యలో ఉంటే ఒక పద్ధతి, బేసి సంఖ్యలో ఉంటే మరో పద్ధతి నప్పుతాయి.

## సరిసంఖ్యలో కప్పలుంటె :

కప్పల సంఖ్య n అయితే మొత్తం $\frac{n^2 + n}{2}$ ఎత్తులు అవసరం అవుతాయి. ఇందులో మరో కప్పమీద నుంచి ఎగరవలసిన ఎత్తులు $\frac{n^2 - n}{2}$; పక్కగదిలోకి జరుగవలసిన ఎత్తులు n ఉంటాయి మన ప్రత్యేక సమస్యలో $n = 6$ కనుక—

$$\frac{n^2 + n}{2} = \frac{6^2 + 6}{2} = \frac{42}{2} = 21 \text{ ఎత్తులు}$$

ఇందులో $\frac{n^2 - n}{2} = \frac{36 - 6}{2} = 15$ గంతులు

మిగిలిన 6 పక్కకు జరిగే ఎత్తులూనూ.

ఎత్తులు వేయవలసిన క్రమం : 1 నుంచి n వరకూ ఉన్న అంకెలలో సరి సంఖ్యలన్నిటినీ ఆరోహణ (Ascending order) క్రమంలోనూ, తరవాత బేసి సంఖ్యలన్నిటినీ అవరోహణ (Descending order) క్రమంలోనూ వ్రాయాలి. ఇదే సంఖ్యలను ఇదే క్రమంలో $\frac{n}{2}$ సార్లు వ్రాయాలి. ఆఖరున సరిసంఖ్యలను మాత్రం ఆరోహణ క్రమంలో వ్రాయాలి.

ఉదాహరణకి :

n = 6 అయితే; 2, 4, 6 అనే సరిసంఖ్యలను ఆరోహణ క్రమంలోనూ; 5, 3, 1 అనే బేసిసంఖ్యలను అవరోహణ క్రమంలోనూ వ్రాయాలి. ఈ 2, 4, 6, 5, 3, 1 అనే అంకెల గుంపును $\frac{n}{2} = \frac{6}{2} = 3$ సార్లు వ్రాయాలి. తరువాత 2, 4, 6, అనే సరిసంఖ్యలను మాత్రం ఆరోహణ క్రమంలో వ్రాయాలి. అంతే. అవసరమైన మార్పు వచ్చేస్తుంది.

మరొక్క ఉదాహరణ :

ఆటలో 10 కప్పలుంటే $\frac{n^2 + n}{2} = \frac{10^2 + 10}{2}$

$= 55$ ఎత్తులు అవసరం.

ఎత్తుల క్రమం :

(2, 4, 6, 8, 10, 9, 7, 5, 3, 1), (2, 4, 6, 8, 10, 9, 7, 5, 3, 1),
(2 4, 6, 8, 10, 9, 7, 5, 3, 1), (2, 4, 6, 8, 10, 9, 7, 5, 3, 1),
(2, 4, 6, 8, 10, 9, 7, 5, 3, 1), (2, 4, 6, 8, 10),

## బేసి సంఖ్యలో కప్పలుంటే

కప్పల సంఖ్య x అయితే

మొత్తం$\left(\frac{x^2 + 3x}{2}\right) - 4$ ఎత్తులు అవసరం

ఇందులో $\frac{x^2 - x}{2}$ దాటడాలు, $(2 - 4)$ పక్కగదిలోకి జరగడాలూ ఉంటాయి.

ఎత్తు వేయవలసిన క్రమం :

సరి సంఖ్య లన్నిటినీ ఆరోహణ క్రమంలో వ్రాసి, తరవాత బేసి సంఖ్యా

లన్నిటినీ అవరోహణ క్రమంలో వ్రాయాలి. ఈ అంకెల గుంపును $\frac{x-1}{2}$ సార్లు వ్రాయాలి. తరవాత (x–1) తప్ప తక్కిన సరిసంఖ్య లన్నిటినీ ఆరోహణ క్రమంలో వ్రాసి, 1 తప్ప తక్కిన బేసిసంఖ్య లన్నిటినీ అవరోహణ క్రమంలో వ్రాయాలి. తరవాత 1 నీ, x నీ మినహాయించి తక్కిన అంకెలు అన్నిటినీ (సరి, బేసి వివక్ష లేకుండా) ఆరోహణ క్రమంలో వ్రాయాలి. అంతే.

అంతా గందరగోళంగా ఉందా? ఒక ఉదాహరణ చూపిస్తే అన్నీ చక్కబడతాయి.

కప్పల సంఖ్య 11 అనుకుందాం.

మొత్తం ఎత్తులు $= \left(\frac{11^2+3\times 11}{2}-4\right) = 73$

ఇందులో $\frac{11^2-11}{2} = 55$. మిగిలిన 18 పక్కకు జరగడాలు.

ఎత్తుల క్రమం :

(2, 4, 6, 8, 10, 11, 9, 7, 5, 3, 1);
(2, 4, 6, 8, 10, 11, 9, 7, 5, 3, 1);
(2, 4, 6, 8, 10, 11, 9, 7, 5, 3, 1);
(2, 4, 6, 8, 10, 11, 9, 7, 5, 3, 1);
(2, 4, 6, 8, 10, 11, 9, 7, 5. 3, 1);
(2, 4, 6, 8, 11, 9, 7, 5, 3,) (2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10)

# 40. π అంటే ఏమిటి ?

వృత్తముయొక్క చుట్టుకొలతని వృత్తముయొక్క వ్యాసంచేత భాగిస్తే వచ్చే విభక్తమే π అని మనమంతా చిన్నతరగతిలోనే చదువుకున్నాం ఈ π విలువ $\frac{22}{7}$ అనీ లేదా 3.14 అనీ మనకు లెక్కల మాష్టర్లు నూరిపోశారు. కానీ, ఇవేవీ ఖచ్చితంగా π విలువకు సమానం కావు. దీని విలువను సుమారుగా సూచించవచ్చునే కాని, ఖచ్చితంగా ఇంత అని ఎవ్వరూ నిర్ణయించలేరు. దీనికి సంబంధించిన కథాకమామిషులు కొద్దిగా తెలుసుకుందాం.

2500 సంవత్సరాలకు పూర్వమే గ్రీకు తత్త్వవేత్తలు π విలువను నిర్ణయించడానికి చాలా కృషిచేశారు. వాళ్ళకు ఏ సంగతి అయినా ఖచ్చితంగా తెలియకపోతే నిద్రపట్టదు. దాని అంతు తేల్చుకోడానికి అహోరాత్రాలూ నిద్రాహారాలు మానుకుని తీవ్రమైన కృషి చేసేవారు.

గ్రీకుల కన్న బహు పురాతన కాలంలో $\pi = 3$ అని ఉజ్జాయింపుగా ఉపయోగించేవారు. ఇంత చుట్టుకొలత కలిగిన గుండ్రని బల్ల చేసి ఇమ్మని ఏ వడ్రంగికో, గుండ్రని వేదికను తయారుచేయమని ఏ మేస్త్రీకో పురమాయిస్తే ఎంత వ్యాసంగల వృత్తం గీయాలో అతడికి ఏల్లా తెలుస్తుంది? అదిగో, అందుకోసం ఈ $\pi$ విలువ కావలసి వచ్చింది. 30 అంగుళాల చుట్టుకొలత గల గుండ్రని బల్ల కావాలంటే – 30 ని 3 చే భాగించగా వచ్చిన 10 ని వ్యాసంగా తీసుకుని లేదా ఇందులో సగమైన 5 అంగుళాల వ్యాసార్ధాన్ని తీసుకుని వృత్తం గీసి, బల్ల తయారు చేసేవారు. అప్పుడు దాని చుట్టుకొలత సుమారుగా 30 అంగుళాలు ఉంటుందని సరిపెట్టుకునేవారు. అది కాస్త అటూఇటూగా ఉన్నప్పటికీ కొంప మునిగిపోయే ప్రమాదం ఏమీలేదు కనుక ఆ దోషం వారిని బాధించేదికాదు.

ఆ వృత్తం చుట్టుకొలత ఖచ్చితంగా 30 అంగుళాలు మాత్రమే ఉండాలంటే ఎంత వ్యాసార్థం తీసుకుని సున్న గీయాలి? ఆ సంఖ్య ఫలానా అని తెలుసుకోవడం ఎల్లాగా? తెలుసుకున్న దానిని అది నిజంగా అంతేనని రుజువు చెయ్యడం ఎలాగ?– ఈ విషయాలు గ్రీకు విద్వాంసుల్ని మహా తికమక పెట్టేయి.

చైనీయులు 3000 సంవత్సరాల క్రితం $\pi = \sqrt{10} = 3.162$ అని ఉపయోగించేవారు.

ఒకపాటి నిర్దుష్టత్వం చాలుననుకుంటే ఈ రోజుల్లో $\pi = 22/7 = 3.143$ అనే సంఖ్యను వాడుక చేస్తున్నాం. ఇంకా నిర్దుష్టంగా కావాలంటే $\pi = 3.1416$ అని వాడుకోవచ్చు. $\pi$కి విలువను వాడితే 3 లక్షల పాళ్ళల్లో ఒక్కపాలు మాత్రమే దోషం ఉంటుంది. ఈ విలువను అతి సున్నితమైన పనిముట్ల తయారీలో కూడా వాడుకోవచ్చు. సాధారణంగా ఇంతకన్న ఖచ్చితమైన విలువ అవసరం ఉండదు.

అల్‌ఖాసీ అనే అరబ్బీ గణిత శాస్త్రజ్ఞుడు 1430లో $\pi$ విలువను 16 దశాంశ స్థానాల వరకూ కనుగొన్నాడు.

లుడాల్ఫ్ వాన్ క్యూలెన్ (1540 - 1610) అనే జర్మన్ గణిత శాస్త్రజ్ఞుడు తన జీవిత కాలమంతా శ్రమపడి $\pi$ విలువను 35 దశాంశ స్థానాలవరకూ కనుక్కున్నాడు ఆ విలువ ఇదీ:

$\pi$ = 3.141, 592, 653, 589, 793, 238,
462, 643. 383. 279, 502, 88.......

అతడు చనిపోయాక అతడి గోరీమీద అతడు కనుగొన్న ఈ $\pi$ విలువను చెక్కించారు.

నిజానికి π విలువ ఎన్ని దశాంశ స్థానాల వరకూ కనుగొన్నప్పటికీ అంతం అవడం అంటూ ఉండదు. ఎంతకాలం శ్రమపడ్డా దరి అంటూ కనబడదు. ఉజ్జాయింపుగా ఇంత అనేకాని ఖచ్చితంగా ఇంత అని ఆఖరికి దేవుడు కూడా చెప్పలేడు.

1873 లో విలియం షాంక్స్ అనే గణితశాస్త్రజ్ఞుడు π విలువను 707 దశాంశ స్థానాలవరకూ కనుగొన్నాడు ఇటీవల ఎలక్ట్రానిక్ కంప్యూటరు ఉపయోగించి, దీని విలువ రెండువేల దశాంశ స్థానాల వరకూ తెలుసుకున్నారు.

ఇన్నేసి దశాంశ స్థానాలు తెలుసుకోవడంవల్ల ఉపయోగం ఏమీలేదు. π = 3.1416 అని ఉపయోగిస్తే వచ్చే నిర్దుష్టత్వం ఏ రకపు లెక్కలకైనా సరే చాలు.

అయితే, ఇంత శ్రమపడి వందలకొద్దీ దశాంశ స్థానాల వరకూ నిర్ణయించడం ఎందుకూ? ఈ అంకెలు పునఃపునరావృతం (Repetitive) అవుతాయేమో చూద్దామనేది ఒక కారణం అని చెప్పవచ్చు. అటువంటి ఆవృత్తి ఏదీ ఇంతవరకూ కనిపించలేదు.

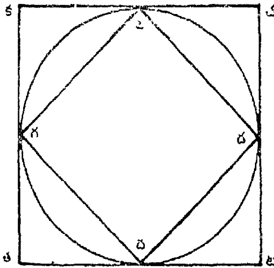
అసలు π విలువను తెలుసుకోవడం ఎలాగ? వృత్తంగీసి, దాని చుట్టుకొలతనీ, వ్యాసాన్నీ కొలిచి, మొదటిదాన్ని రెండవది పెట్టి భాగిస్తే π విలువ తెలుస్తుందికదా? దేనికింత కష్టం ఏముందీ? అని కొందరికి సందేహం కలుగవచ్చు. కానీ, ఇది అంత సులభమైన పనికాదు. ఏమంటే, మన కొలతలు నిర్దుష్టంగా ఉండవు అంగుళంలో వందవ వంతు వరకూ నిక్కచ్చిగా కొలవగలిగినప్పటికీ, ఈ విధంగా తెలుసుకున్న π విలువ రెండు దశాంశ స్థానాల కన్న ఖచ్చితంగా ఉండదు! మరి ఆపైన ఏం చెయ్యాలి? అంతేకాదు. సరళరేఖలో ఉన్న వ్యాసాన్ని అయితే స్కేలు పెట్టి కొలిచాం సరే. గుండ్రంగా వున్న వృత్త పరిధిని కొలవడం ఎల్లాగ? దారమో, తాడో తీసుకుని వృత్తం చుట్టుతిప్పి, ఆ దారంపొడుగును స్కేలుతో కొలవకూడదా అంటారేమో! అది ఎంత కష్టమో స్వయంగా ప్రయత్నించి చూస్తే మీకే తెలుస్తుంది. పరిధి మీద నిలవకుండా దారం జారిపోతూ ఉంటుంది. దారానికి ముడతలు పడవచ్చు. మరీ సాగతీస్తే దారం సాగిపోయి కొలత తప్పవచ్చు. అందుచేతనే కొలతలు తీసుకుని విలువ కట్టడం అనేది గ్రీకు విద్వాంసులకు నచ్చేది కాదు. అది సరియైన పద్ధతి కాదనీ, మేధస్సును ఉపయోగించాలేకాని స్కేలు ఉపయోగించరాదని వాళ్ళ మతం.

మరి స్కేలు ఉపయోగించకుండా వృత్తం తాలూకు పరిధి, వ్యాసముల నిష్పత్తి తెలుసుకోవడం ఎల్లాగ? ఈ పనిని గ్రీకు పండితులు అద్భుతంగా సాధించగలిగేరు. తర్కంతప్ప మరో పనిముట్టును ఉపయోగించకుండా వారు క్షేత్రగణితాన్ని నిర్మించిన తీరు చూస్తే ఆశ్చర్యం వేస్తుంది. అదే యావత్ప్రపంచానికి మార్గదర్శకమైంది.

క్రీస్తుపూర్వం 287 - 212 మధ్య జీవించిన సుప్రసిద్ధ గ్రీకు విజ్ఞాని ఆర్కిమిడీస్ ఈ π విలువను నిర్ణయించడానికి నడుము కట్టేడు. దాని విలువ $3\frac{10}{70}$ కి $3\frac{10}{71}$ కి మధ్యని (అంటే 3 1429 కి 3. 1409 కి మధ్యని) ఉంటుందని ఆయన క్షేత్రగణిత తర్కంతో నిర్ణయించగలిగేడు. ఇది అసలు విలువ (3.1416) కి ఎంత దగ్గరలో ఉందో చూశారు కదూ? దానిని తెలుసుకోడానికి ఆర్కిమిడీసు ఉపయోగించిన పద్ధతి ఎంత వకడ్బందీగా ఉందో చూపిస్తాను.



ఆర్కిమిడీస్ క్రీ.పూ. 287-212




49 వ బొమ్మలో చూపినట్లు ఒక వృత్తాన్ని గీసి, దానిని అనుకుంటూ వెలుపల 'క చ ట త' అనే చతురస్రాన్ని, వృత్తానికి లోపల 'గ ఒ డ ద' అనే చతురస్రాన్ని గీద్దాం. వృత్త వ్యాసం D అనుకుంటే—

'క చ ట త' చుట్టుకొలత = 4D

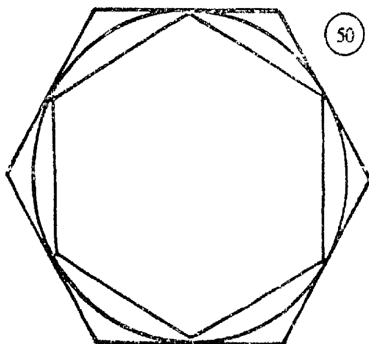
'గ ఒ డ ద' చుట్టుకొలత = $2\sqrt{2}$ D = 2. 828 D

వృత్తం చుట్టుకొలత = π D

వృత్తం చుట్టుకొలత 'గ ఒ డ ద' చుట్టుకొలత కన్న ఎక్కువగానూ, క చ ట త' చుట్టుకొలత కన్న తక్కువగానూ ఉండాలి. అంటే π విలువ 2.828 కన్న ఎక్కువగానూ, 4 కన్న తక్కువగానూ ఉండాలి అన్నమాట.

ఈ రెండు సంఖ్యల సరాసరి $= \frac{2,828 + 4}{2}$ = 3.414 కి సమానం.

ఈ లెక్క మరీ ఉజ్జాయింపుగా ఉంది. ఇంతకన్న బాగా π విలువను నిర్ణయించాలంటే - వృత్తానికి లోపల, బయట చతురస్రాలకు బదులు, క్రమ షడ్భుజాలు (Hexagons) (బొమ్మ 50) గీయవచ్చు.




క్షేత్ర గణిత సూత్రాల ననుసరించి "అంతర షడ్భుజి" చుట్టుకొలత 3D అనీ, "బాహిర షడ్భుజి" చుట్టుకొలత 3.464 D అనీ సులభంగానే తెలుసుకోవచ్చు. అంటే π విలువ 3 కన్న ఎక్కువగానూ, 3.464 కన్న తక్కువగానూ ఉంటుందన్న మాటే కదా? 4 భుజాలకు బదులు 6 భుజాలు ఉపయోగించేసరికి π విలువలకుగల కనిష్ఠ, గరిష్ఠ పరిమితులు మరింత దగ్గరగా వచ్చాయి. అంటే π విలువ వెనుకటికన్న బాగా తెలిసింది అన్నమాట.

ఇల్లాగే వృత్తానికి లోపల, బయట క్రమ ద్వాదశ భుజాలు గీస్తే, వాటి చుట్టుకొలతలు వరుసగా 3.106 D అనీ, 3.216 D అనీ తెలుసుకోవచ్చు. క్షేత్ర గణితాన్ని ఉపయోగించి. అంటే π విలువ 3.106 కీ 3.216 కీ మధ్యని ఉంటుందన్నమాట.

ఈ విధంగా అంతర బాహిర క్రమ భుజాల భుజాల సంఖ్యను పెంచుకుంటూ పోతే π విలువకు గల కనిష్ఠ - గరిష్ఠ పరిమితులమధ్య భేదం సంకుచితం అవుతూ, అంతకంతకు నిర్దుష్టత్వం పెరుగుతుంది. ఇదే సూత్రాన్ని అనుసరించి, ఆర్కిమిడీస్ 96 భుజాలుగల క్రమ భుజాలను వృత్తానికి లోపలా బయటా గీసి, వాటి చుట్టుకొలతలు గణించి, π విలువను మూడో దశాంశస్థానం వరకూ సరిగ్గా కనుక్కోగలిగాడు. ఆనాటి గణితపు పనిముట్లను గుర్తించుకుంటే అతడు సాధించినది మహోన్నతమైన విజయం అని చెప్పకతప్పదు.

"అనంతశ్రేణి" (Infinite series) అనే గణితశాఖ సరిగా అర్థం అయాక π విలువను అతి సులభంగా తోచినన్ని దశాంశ స్థానాలవరకూ లెక్కించడానికి అవకాశం కలిగింది. దానిని ఈ విధంగా సూచించవచ్చు.

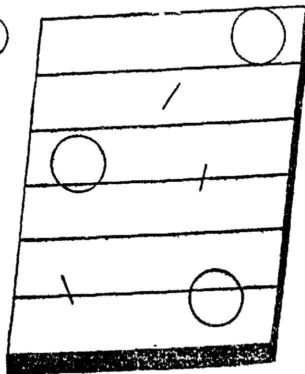
$$\frac{\pi}{6} = \left(\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{3}\right) \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4}\right)\left(\frac{1}{5}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^5 + \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6}\right)\left(\frac{1}{7}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^7 + \cdots\cdots$$

ఈ సమీకరణం సాయంతో $\pi$ విలువను ప్రస్తుతం సులభంగా గణించ గలుగుతున్నారు. కంప్యూటర్ కూడా ఈ విధంగానే లెక్కకడుతుంది.

బఫన్ అనే ప్రకృతి పరిశీలకుడు (Naturalist) (1707 - 1788) ఈ $\pi$ విలువను అతి విచిత్రమైన కొత్త పద్ధతిలో కనుగొన్నాడు. ఈ పనికి అతడు ఉపయోగించిన సాధనాలు ఒక సూది, ఒక బల్ల మాత్రమే (బొమ్మ 51).

మామూలు బల్లమీద—సూది పొడవుకి రెట్టింపు దూరాలలో సమాంతర రేఖలు బల్లనిండా గీశాడు. సూదని చేతితో పట్టుకుని, కొంత ఎత్తునుంచి ఆ బల్లమీదికి జారవిడిచాడు. సూది బల్లమీది గీతలలో ఒక దానికి తగులుతూ అయినా పడి ఉంటుంది; లేదా గీతల మధ్య ఖాళీలో — ఏ గీతకూ తగలకుండా అయినా పడి ఉంటుంది. అంతేకదా? తాను మొత్తం ఎన్నిసార్లు సూదిని జారవిడిచాడో, అందులో ఎన్నిసార్లు సూది ఏదో ఒక గీతకు తగులుతూ పడి ఉందో లెక్కపెట్టాడు. ఈ రెండు సంఖ్యల నిష్పత్తి సరిగ్గా $\pi$ విలువకి సమానం అవుతుందని అతడు కనుగొన్నాడు!

(51)



ఎన్ని ఎక్కువసార్లు సూదిని జారవిడిస్తే అంత ఎక్కువ నిర్దుష్టంగా $\pi$ విలువ తెలుస్తుంది. లజారిన్ అనే ఇటాలియన్ గణిత శాస్త్రజ్ఞుడు 190 లో ఈ ప్రయోగాన్ని 3400 సార్లు చేసి చూశాడు. అందులో 1082 సార్లు సూది గీతలకు తగులుతూ పడింది. కనుక 3400 ÷ 1802 = 3.1415929

అనే సంఖ్య వచ్చింది. ఇది π విలువకు ఎంత సన్నిహితంగా ఉందో చూడండి.

కావాలంటే మీరుకూడా ఈ ప్రయోగాన్ని చేసి π విలువను స్వయంగా కనుక్కోవచ్చు.

అయితే ఒక సందేహం.

బఫన్ గారు చెప్పినట్లు సూదిని జారవిడిస్తే π విలువ ఎందుకు వస్తుంది? దానికీ దీనికీ సంబంధం ఏమిటి? ఇది కాకతాళీయమా? కాదు. దీనికి కారణం ఉంది. ఈ కిటుకు తెలుసుగోరేవారు ఈ వాదం ఏిఁండి:

ఈ ప్రయోగంలో ఉపయోగించిన తిన్నని సూదికి బదులు గుండ్రగా చక్రంలాగ వంచిన తీగను ఉపయోగించాము అనుకుందాం మాటవరసకి. ఈ చక్రపు వ్యాసార్థం మనం మొదట ఉపయోగించిన సూది పొడవుకి సమానం అనుకుందాం. అంటే, ఆ చక్రం చుట్టుకొలత సూది పొడవుకి 2 π రెట్లు ఉంటుంది. కనుక ఈ చక్రాన్ని ఆ బల్లమీదికి ఎత్తునుంచి జారవిడిస్తే ఇది గీతలకు తగిలే అవకాశం - సూది గీతలకు తగిలే అవకాశానికి 2 π రెట్లు అధికంగా ఉంటుంది.

సరే. ఇంక ఈ చక్రం ఎన్నిసార్లు గీతలకు తగులుతూ పడుతుందో చూద్దాం.

చక్రపు వ్యాసం గీతల మధ్యదూరానికి సరిగ్గా సమానం కనుక, చక్రం తప్పకుండా ప్రతీసారీ గీతలకు తగిలి తీరుతుంది. ఒక గీతమీద పడిందంటే అటూ ఇటూ ఆ రెండు గీతలకూ తగులుతూ ఉంటుంది. అంటే, ఎన్నిసార్లు చక్రాన్ని జారవిడిస్తే అంతకు రెట్టింపు సార్లు చక్రం గీతలకు తగులుతూ పడు తుంది అన్నమాట.

$$\frac{\text{చక్రాన్ని జారవిడిచిన సంఖ్య}}{\text{చక్రం గీతలకు తగిలే సంఖ్య}} = \frac{1}{2}$$

చక్రంకన్న 2π రెట్లు చిన్నది కనుక, సూది గీతలకు తగిలే అవకాశం చక్రం తగిలే అవకాశంలో 2π వ వంతు అని చెప్పుకున్నాం కదా?

కనుక

$$\frac{\text{సూది జారవిడిచిన సంఖ్య}}{\text{సూది గీతలకు తగిలే సంఖ్య}} = \frac{1}{2 \times \frac{1}{2\pi}} = \pi$$

గ్రీకు భాషలో "పరిధి"ని "పెరిమీటర్" (rerimeter) అంటారు. ఆ భాషలో P అనే అక్షరాన్ని π అని వ్రాస్తారు. దీనిని "పై" ఉచ్చరిస్తారు. కనుక పరిధి, వ్యాసాల నిష్పత్తిని సూచించడానికి π అనే గుర్తును వాడుక చేశారు. దానినే ఈ నాటికీ మనం వాడుకుంటున్నాం.

# 41. పైథాగరస్ సిద్ధాంతంలో చమత్కారం

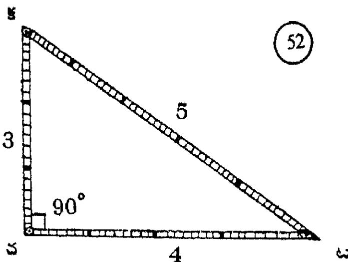
గణిత ఖగోళ శాస్త్రాలలో గ్రీకులు సాధించిన ఘన విజయాలు జగద్విదితాలు. అసలు శాస్త్రీయ దృక్పథం అంటే ఏమిటో, శాస్త్ర పరిశోధన ఏ విధంగా జరపాలో, అతివ్యాప్తి అవ్యాప్తి లేని సూత్ర నిర్వచనం ఎలా చెయ్యాలో, ఏదైనా ప్రవచనానికి రుజువు చూపడం అంటే ఏమిటో, తర్కం అనే బలిష్ఠమైన పునాదుల మీద విజ్ఞానశాస్త్ర మహాసౌధాన్ని ఎలా లేవదీయాలో యావత్ప్రపంచానికి నేర్పినవారు గ్రీకులే. ఈనాడు మనం అధ్యయనం చేస్తున్న గణిత, ఖగోళ, జంతు, వృక్ష, రాజ్యాంగ నిర్వహణ, అర్థశాస్త్రాదు లన్నిటికి ప్రాతిపదిక గ్రీకులు వేసినదే. క్రీస్తుపూర్వం ఆరేడు శతాబ్దాల వ్యవధిలో ఈ చిన్న దేశంలో ప్రభవించిన ఉద్దండ పండితులు తడవిచూచి తమ ముద్ర వేయని విజ్ఞాన శాఖలు వెతుకుదామన్నా కనిపించవు.

ఆటువంటి గ్రీకు విద్వల్లోకంలో పైథాగరస్ (క్రీ పూ. 570_504) మేరుపర్వతం లాంటివాడు. అతని పేరుతో చలామణీ అవుతున్న క్షేత్ర గణిత సిద్ధాంతం తెలియని వారుండరు.

సమకోణ త్రిభుజంలో కర్ణంమీద గీసిన చతురస్రపు వైశాల్యం, మిగిలిన రెండు భుజములమీద గీసిన చతురస్రాల వైశాల్యముల మొత్తానికి సమానమని చెబుతుంది పైథాగరస్ సిద్ధాంతం.

ఈజిప్షియనులకూ, హిందువులకూ ఈ సూత్రం గ్రీకులకన్న ముందే తెలిసి ఉన్నప్పటికీ క్రీ. పూ. 550 ప్రాంతాల మొట్టమొదటగా పైథాగరస్ పండితుడు ఈ సూత్రానికి రుజువు చూపడంచేత దీనికి ఆయన పేరే స్థిరపడింది.

3, 4, 5 ప్రమాణాలు భుజములుగాగల త్రిభుజం సమకోణ త్రిభుజం అవుతుందని ఈజిప్టులో పిరమిడులు నిర్మిస్తున్న కాలంలోనే తెలుసు. 12 బారలతాడు తీసుకుని, ఒక కొననుంచి 3 బారల దూరంలో ఒక ముడి, అక్కడి



నుంచి 4 బారల దూరంలో మరొకముడి వేసి, మిగిలిన తాడుకొసలు ముడివేసే వారు (52 వ బొమ్మ). ఈ మూడు ముళ్ళలోనుంచి చెక్కిన కర్రముక్కలు దూర్చి, తాళ్ళను సాగదీసి, ఈ మూడు కర్రలనూ నేలలో గుచ్చేవారు. అప్పుడు 3 బారల తాడు, 4 బారల తాడు కలిసినచోట సమకోణం (90°) ఏర్పడుతుందని వారికి తెలుసు.

ఈ సంఖ్యను రెట్టింపుచేయగా వచ్చిన 6, 8, 10 ప్రమాణాలు భుజము గలది కూడా సమకోణ త్రిభుజమే.

ఈ విధంగా పైథాగరస్ సిద్ధాంతానికి సరిపడే పూర్ణసంఖ్యలు కొన్ని ఇక్కడ చూపిస్తాను:

$$3^2 + 4^2 = 5^2$$
$$5^2 + 12^2 = 13^2$$
$$6^2 + 8^2 = 10^2$$
$$7^2 + 24^2 = 25^2$$
$$8^2 + 15^2 = 17^2$$
$$9^2 + 12^2 = 15^2$$
$$9^2 + 40^2 = 41^2$$
$$10^2 + 24^2 = 26^2$$
$$11^2 + 60^2 = 61^2$$
$$12^2 + 16^2 = 20^2$$
$$12^2 + 35^2 = 37^2$$
$$13^2 + 84^2 = 85^2$$
$$14^2 + 48^2 = 50^2$$
$$15^2 + 20^2 = 25^2$$
$$15^2 + 36^2 = 39^2$$

.... .... ....

ఇటువంటి సూత్రానికి లోబడే పూర్ణసంఖ్యలు ఇంకా ఎన్ని కావాలంటే అన్ని అతి సులభంగా వ్రాయడానికి ఒక చక్కని సూత్రం ఉంది.

m, n అనే రెండు పూర్ణసంఖ్యలు - నీకు తోచినవి తీసుకో, అప్పుడు 2mn అనేది సమబాహు త్రిభుజపు ఒక భుజమూ, $(m^2 - n^2)$ అనేది రెండవ భుజము; $(m^2 - n^2)$ అనేద మూడవ భుజము (కర్ణము) అవుతాయి.

ఉ దా హ ర ణ కి :

$m = 3$; $n = 1$ అనుకుందాం. అప్పుడు

$2\ m.n = 2 \times 3 \times 1 = 6$

$m^2 - n^2 = 3^2 - 1^2 = 9 - 1 = 8$

$m^2 + n^2 = 3^2 + 1 = 9 + 1 = 10$

6, 8, 10 ప్రమాణాలు భుజములుగాగల త్రిభుజం సమకోణ త్రిభుజం అవుతుంది.

లేదా

$6^2 + 8^2 = 10^2$

మరొక చిత్రమైన ఉదాహరణ :

ఒక భుజము 48 ప్రమాణాలు ఉండే నాలుగు వేరు వేరు సమకోణ త్రిభుజాలు గీయడం ఎలాగ?

$2\ m\ n = 48$ అనుకుందాం

$m.n = 24$ అవుతుంది.

కనుక $m = 8;\ n = 3$ కావచ్చు — (1)

అప్పుడు $m^2 - n^2 = 8^2 - 3^2 = 64 - 9 = 55$

$m^2 + n^2 = 8^2 + 3^2 = 64 + 9 = 73$

$48^2 + 55^2 = 73^2$

ఇది మొదటి సమకోణ త్రిభుజం.

లేదా $m = 6;\ n = 4$ కావచ్చు — (2)

అప్పుడు $m^2 - n = 6^2 - 4^2 = 36 - 16 = 20$

$m^2 + n^2 = 6^2 + 4^2 = 36 + 16 = 52$

$48 + 20^2 = 52^2$

ఇది రెండవ సమీకరణ త్రిభుజం.

లేదా $m = 12;\ n = 2$ కావచ్చు — (3)

అప్పుడు $m^2 - n^2 = 12^2 - 2^2 = 144 - 4 = 140$

$m^2 + n^2 = 12^2 + 2^2 = 144 + 4 = 148$

$48^2 + 140^2 = 148^2$

ఇది మూడవ సమకోణ త్రిభుజం.

లేదా $m = 24;\ n = 1$ కావచ్చు — (4)

అప్పుడు $m^2 - n^2 = 24^2 - 1^2 = 576 - 1 = 575$

$m^2 - n^2 = 24^2 + 1^2 = 576 + 1 = 577$

$48^2 + 575^2 = 577^2$

ఇది నాలుగవ సమకోణ త్రిభుజం.

ఈ విధంగా సమకోణ త్రిభుజాలు గీయవచ్చు.

ఈ పైథాగరస్ సిద్ధాంతానికే సామాన్యరూపం

$x^2 + y^3 = z^2$ అని వ్రాయవచ్చు.

ఈ సమీకరణానికి నప్పే పూర్ణ సంఖ్యలను ఎల్లా నిర్ణయించవచ్చునో ఇంతవరకూ తెలుసుకున్నాం.

ఇట్లాగే

$x^3 + y^3 = z^3$

అనే సమీకరణానికి నప్పే పూర్ణ సంఖ్యలున్నాయా? పోనీ

$x^4 + y^4 = z^4$

అనే సమీకరణానికి నప్పే పూర్ణ సంఖ్యలు వెతికితే దొరుకుతాయా?

అల్లాగే ఇంతకన్న హెచ్చు ఘాతాలకు (Powers) నప్పే పూర్ణసంఖ్యల మాట ఏమిటి?

ఇటువంటి పూర్ణసంఖ్యలేవీ ఇంతవరకూ ఎందరు ఎన్నివిధాల ప్రయత్నించినా దొరకలేదు. ఘాతం = 2 అయితేనే దొరుకుతాయి. అంతకన్న పెద్ద ఘాతాలకు వేటికి పూర్ణసంఖ్యలు దొరకలేదు.

ఇంతవరకూ దొరకలేదు కనుక అటువంటి పూర్ణసంఖ్యలు అసలు ఎన్నటికీ దొరకవు అని ఖచ్చితంగా చెప్పగలమా?

అసలు అటువంటి పూర్ణసంఖ్యలు 2 కన్న హెచ్చు ఘాతాలకు ఉండడానికి వీలులేదని ఖచ్చితమైన గణిత సూత్రాలతో రుజువు చేయగలగాలి. అటువంటి రుజువు దొరికేవరకూ గణితశాస్త్రజ్ఞులు ఊరుకోరు.

ఈ రుజువుకి సంబంధించిన ఆసక్తికరమైన చారిత్రక సన్నివేశం ఒకటి ఉంది.

ఫెర్మాట్ అనే సుప్రసిద్ధ ఫ్రెంచి గణితశాస్త్రజ్ఞుడు (1601 - 1665) తన నోటు పుస్తకంలో ఈ విషయాన్ని ప్రస్తావిస్తూ

$x^2 + y^2 = z^2$

అనే సమీకరణాన్ని తృప్తిపరచే x, y, z లు పూర్వసంఖ్యలతో కావాలంటే, n = 2 అయినప్పుడు మాత్రమే సాధ్యమనీ, n విలువ 2 కన్న అధికమైతే అసాధ్యమనీ, దీనికి అతి సులభమైన చక్కని రుజువును తాను కనుగొన్నాననీ మార్జినులో వ్రాసుకున్నాడు. అంతేకాని, తాను కనుగొన్న రుజువు ఏమిటో మాత్రం వివరించలేదు. చాలా సులభంకదా, వివరించేదేమిటిలే అని ఊరుకున్నాడో ఏమో! తమాషా ఏమిటంటే, ఇది జరిగి మూడున్నర శతాబ్దాలు గావస్తున్నా, హేమాహేమీలవంటి గణిత శాస్త్రజ్ఞులు ప్రపంచమంతటా అనేకవిధాల ప్రయత్నించినా, దానిని రుజువు చేయడం మాత్రం ఇంతవరకూ ఎవ్వరికీ సాధ్యం కాలేదు! ఫెర్మాట్‌గారు తనకు స్ఫురించిన

ఆ రుజువు ఏమిటో రాసిపడేసి ఉంటే ఎంత బాగుండేది? రుజువును కనుగొన్నానని ఫెర్మాట్ భ్రమపడ్డాడేమోననీ, నిజంగా రుజువు ఆయనకి కూడా దొరకనే లేదేమోననీ ఇప్పుడిప్పుడు గణిత శాస్త్రజ్ఞులు అనుమానిస్తున్నారు.

దీనినే "ఫెర్మాట్‌గారి ఆఖరి సిద్ధాంతం" అంటారు. ఆ తరవాత ఆయన మరి ఏ సిద్ధాంతాన్నీ ఆవిష్కరించలేదు.

$x^3 + y^3 = z^3$

అనే సమీకరణాన్ని తృప్తిపరచే పూర్ణసంఖ్య లేవీ లేవు అనేమాటకు అర్థం ఏమిటంటే—

ఒక ఘనాకారపు ముక్కను, రెండు చిన్న చిన్న ఘనాకృతులుగా (వాటి భుజములు పూర్ణసంఖ్యలు అయేటట్లు) కోయడం అసాధ్యం అని. ఒక ఉదాహరణ చూపిస్తే ఈ విషయం బాగా అర్థమవుతుంది.

12 అంగుళాల పొడవు, వెడల్పు, ఎత్తు కలిగిన ఘనాకారపు ముక్క ఉన్నదనుకుందాం. దీని ఘనపరిమాణం $= 12 \times 12 \times 12 = 1728$ ఘనపు టంగుళాలు.

దీనిని రెండు భాగాలుగా చేద్దామంటే పూర్ణసంఖ్యలు భుజాలుగా గల ఘనములు ఏర్పడవు - ఎల్లా విడదీసినాసరే.

మాటవరసకి :

$1728 = 1000 + 728$

అని విడదీశాం అనుకుందాం.

$1000 = 10 \times 10 \times 10 = 10^3$ అవుతుంది సరే కానీ, 728 యొక్క ఘనమూలం పూర్ణసంఖ్య కాదు. అంతేకాదు, ఇతమిత్థమని చెప్పడానికి వీలులేని అనంత దశాంశ స్థానాలవరకూ వ్రాస్తేకాని పూర్తికాని సంఖ్య ఇది. $\sqrt[3]{728} = 3.99588$ ........

3. 99588 అంగుళాలు భుజముగా గల ఘనపు దిమ్మను నిర్మించినప్పటికీ దాని ఘన పరిమాణం 727.99999 .... అవుతుందేకాని, ఖచ్చితంగా 728 కి సమానం కాదు.

సరిగ్గా ఈ కారణం చేతనే అలనాడు ఎపోలో దేవత కలలో కనబడి కోరిన కోరికను తీర్చడం ఆనాటి గ్రీకు విద్వాంసులకు తలకు మించిన పని అయిపోయింది.

# 42. పాలకొలతలు—బిలియర్డ్ బంతులు

I. 8 లీటర్లు, 5 లీటర్లు పట్టే, 3 లీటర్లు పట్టే పాత్రలు మూడు ఉన్నాయి.

8 లీటర్ల పాత్రనిండా పాలు ఉన్నాయి. 5, 3 పాత్రలు ఖాళీగా ఉన్నాయి. ఇప్పుడు సమస్య ఏమిటంటే—ఈ మూడు పాత్రలను మాత్రమే ఉపయోగించి, 8 లీటర్ల పాలను 4 లీటర్లుగా విడదీయడం ఎల్లాగ?

రకరకాల పాఠాంతరాలలో ఈ సమస్య వాడుకలో ఉంది కొంత మందికి దీని జవాబుకూడా తెలిసే ఉంటుంది. అయినా సరే జవాబు ఇక్కడ (బొమ్మ 53) వ్రాస్తాను

(53)

| 8 లీ. | 8 | 3 | 3 | 6 | 6 | 1 | 1 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 5 లీ. | 0 | 5 | 2 | 2 | 0 | 5 | 4 | 4 |
| 3 లీ. | 0 | 0 | 3 | 0 | 2 | 2 | 3 | 0 |

ఇక్కడ వ్రాసిన పద్ధతిలో 7 మార్పులలో 8 లీటర్ల పాలను 4 లీటర్లు, 4 లీటర్లుగా విడ దీయవచ్చు., ఏ పాత్ర నుంచి ఏ పాత్రలోకి పాలు పోశామో బాణపు గుర్తులతో చూపించాను. ప్రతీమార్పు తరవాతా ఏ పాత్రలో ఎన్ని పాలుంటాయో ఈ పట్టిక చూస్తే సులభంగా తెలుస్తుంది.

II. ఇటువంటిదే మరో సమస్య.

12 లీటర్లు, 7 లీటర్లు, 5 లీటర్లు పట్టే పాత్రలు మూడు ఉన్నాయి. 12 లీటర్ల పాత్రనిండా పాలున్నాయి. మిగిలిన రెండూ ఖాళీగా ఉన్నాయి. ఈ మూడు పాత్రలు మాత్రమే ఉపయోగించి ఆ పాలను 6 లీటర్లు, 6 లీటర్లుగా విడదీయడం ఎల్లాగ?

(54)

| 12 లీ. | 12 | 7 | 7 | 2 | 2 | 9 | 9 | 4 | 4 | 11 | 11 | 6 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 7 లీ. | 0 | 0 | 5 | 5 | 7 | 0 | 3 | 3 | 7 | 0 | 1 | 1 | 6 |
| 5 లీ. | 0 | 5 | 0 | 5 | 3 | 3 | 0 | 5 | 1 | 1 | 0 | 5 | 0 |

12 ఎత్తులలో ఈ సమస్యను సాధించే పద్ధతి ఇక్కడ చూపించాను (బొమ్మ 54)

III. పై రెండు ఉదాహరణలలోనూ పెద్ద పాత్ర పరిమాణం, మిగిలిన రెండు పాత్రల మొత్తం పరిమాణానికి సమానం.

$8 = 5 + 3$

$12 = 7 + 5$

కాని, ఈ నియమం పాటించి తీరాలని ఏమీలేదు. ఉదాహరణకి :

12 లీ. 9 లీ, 5 లీ పాత్రలతో ఈ సమస్యను 9 ఎత్తులలో సాధించే

(55)

| 12 లీ. | 12 | 7 | 0 | 5 | 5 | 10 | 10 | 1 | 1 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 9 లీ. | 0 | 0 | 7 | 7 | 2 | 2 | 0 | 9 | 6 | 6 |
| 5 లీ. | 0 | 5 | 5 | 0 | 5 | 0 | 2 | 2 | 5 | 0 |

పద్ధతి 55 వ బొమ్మలో చూపించాను.

ఇక్కడ వ్రాసిన పద్ధతులలోనే కాక ఇంకా అనేక విధాలుగా ఈ సమస్యలను సాధించే అవకాశం ఉంది. అయితే, ఏ వరసలో ఈ మార్పులు చెయ్యాలో ఎల్లా తెలుసుకోవడం? అనేకసార్లు ప్రయత్నించగా ప్రయత్నించగా ఆఖరికి సరియైన జవాబు దొరకవచ్చు. అంతేకాక, ఈ రకమైన సమస్యలను సాధించే రూలు ఏమీలేదా?

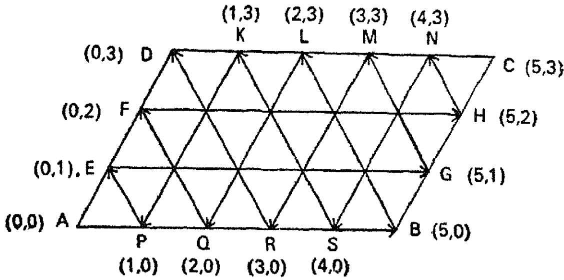
నిజానికి అటువంటి రూలు ఒకటి ఉంది. అది అర్థం అవాలంటే "బిలియర్డ్స్" ఆడాలి!

బిలియర్డ్స్‌కి దీనికి సంబంధం ఏముంది అంటారా? అదే తమాషా! విచిత్రమైన సంబంధం ఒకటి వుంది ఈ ఆట ఎల్లా ఆడతారో తెలుసుకుంటే చాలు – ఇటువంటి సమస్య ఏది ఇచ్చినాసరే క్షణాలమీద సాధించెయ్యవచ్చు. అంతే కాదు – ఇంకా ఎన్నెన్ని విధాలుగా సాధించవచ్చునో అన్ని విధాలూ కనుక్కోవచ్చు. అంతేకాదు. ఇచ్చిన సమస్య సాధ్యమో, అసాధ్యమో కూడా నిర్ణయించవచ్చు. కనుక, బిలియర్డ్స్ ఆటను గురించి కొద్దిగా తెలుసుకుందాం.

6 పాకెట్లు గల దీర్ఘచతురస్రాకారపు బల్లమీద రంగురంగుల బంతులు ఉంచుతారు ఆటగాడు పొడుగుపాటి కర్ర (cue)తో ఒక బంతిని గురిచూచి పొడుస్తాడు. ఆ బంతి దొర్లుకుంటూవెళ్ళి, బల్లచివరనున్న "గోడ"కి తగిలి, పరావర్తనం చెంది, మరో దిక్కుగా ప్రయాణంచేసి, వెళ్ళి వెళ్ళి మరో గోడకి తగులుతుంది. అక్కడ పరావర్తనం చెంది, మరో దిశలో నడుస్తుంది....మన సమస్యకి సంబంధించినంతవరకూ బిలియర్డ్స్‌ని గురించి ఈపాటి పరిజ్ఞానం చాలు.

బంతి వెళ్ళి గోడకి తగిలినప్పుడు – ఏ కోణంలో గోడను గుద్దుకుందో, సరిగ్గా అదే కోణంలో పరావర్తనం చెందుతుంది,

ఈ సూత్రాన్ని ఉపయోగించి కొత్తరకం టేబుల్ తయారు చేద్దాం. ఈ టేబుల్ కొలతలు ఇచ్చిన పాత కొలతల సమస్యనుబట్టి మరుతూ ఉంటాయి. ఉదాహరణకి : 8, 5, 3 లీటర్ల పాత్రలతో చేయవలసిన సమస్య ఇచ్చినట్లు అయితే టేబుల్ పొడుగు వెడల్పులు 5:3 నిష్పత్తిలో ఉండాలి. ఈ బల్ల దీర్ఘ చతురస్రాకారంలో కాక 60°, 120° కోణాలుగల సమాంతర చతుర్భుజ (Parallelogram) ఆకారంతో ఉంటుంది. (బొమ్మ 56).




ఇందులో AB = CD = 5; AD = BC = 3; కోణం A = కోణం C = 60°; కోణం B = కోణం D = 120°. మొట్టమొదట్లో బంతి A దగ్గర ఉండాలి. దానిని AB దిశలో కర్రతో పొడిస్తే, అది దొర్లుకుంటూ వెళ్ళి B దగ్గర పరావర్తనం చెంది; BL దిశలో ప్రయాణం చేసి L దగ్గర పరావర్తనం చెంది; LQ దిశలో ప్రయాణం చేసి Q దగ్గర పరావర్తనం చెంది, QF దిశలో ప్రయాణం చేసి F దగ్గర పరావర్తనం చెంది బొమ్మలో బాణపు గుర్తులున్న మార్గాలలో పోతూ ఉంటుంది. ఈ విధంగా ప్రయాణం చేసే దానిని సులభంగానే గుర్తించవచ్చు.

ఏ బిందువుల వద్ద పరావర్తనం చెందిందో ఆ బిందువులు ఏ పాత్ర ఏ పాత్రలోకి ఎంత ద్రవం పొయ్యాలో తెలియజేస్తాయి! ఈ వివరాలు తెలియాలంటే ఆ పరావర్తన బిందువుల "కోఆర్డినేటులు" (నిర్దేశాంకములు) తెలియాలి. ఒకటి రెండు ఉదాహరణలతో ఈ విషయాన్ని వివరిస్తాను.

A దగ్గర బయలుదేరి సమాంతర చతుర్భుజం మీది మరి ఏ బిందువునైనా చేరుకోవాలంటే అడ్డంగా ఎన్ని గళ్ళు, ఏటవాలుగా ఎన్నిగళ్ళు ప్రయాణం చెయ్యాలో తెలిపే అంకెలే ఆ బిందువుయొక్క నిర్దేశాంకములు. ఉదాహరణకి A నుంచి B ని చేరుకోవాలంటే అడ్డంగా 5 గళ్ళు, వాలుగా సున్నగళ్ళు నడవాలి, కనుక B యొక్క నిర్దేశాంకములు (5, 0) అని వ్రాస్తారు.

A నుంచి L ని చేరుకోవాలంటే అడ్డంగా 2 గళ్ళు, వాలుగా 3 గళ్ళు నడవాలి కనుక L యొక్క నిర్దేశాంకములు (2, 3) అని వ్రాస్తారు.

A నుంచి D ని చేరుకోవాలంటే అడ్డంగా సున్నగళ్ళు, వాలుగా 3 గళ్ళు నడవాలి కనుక D యొక్క నిర్దేశాంకములు (0,3) అని వ్రాస్తారు.

ఇల్లాగే మిగిలిన బిందువుల నిర్దేశాంకములు కూడా సులభంగా తెలుసుకోవచ్చు.

మొట్ట మొదట బంతి A దగ్గర బయలుదేరింది. (0,0) అనేవి A యొక్క నిర్దేశాంకములు. ఈ అంకెలలో మొదటిది 5 లీటర్ల పాత్రలో ఉన్న పాలను, రెండవ అంకె 3 లీటర్ల పాత్రలోని పాలను తెలియజేస్తాయి. అంటే మొట్ట మొదట్లో 5 పాత్రలో సున్న పాలు, 3 పాత్రలో సున్న పాలు ఉన్నాయి అన్నమాట. అంటే 8 పాత్రలోనే అన్ని పాలూ ఉన్నాయని అర్థం.

A దగ్గర బయలుదేరిన బంతి B దగ్గర - అంటే (5, 0) దగ్గర మొదటిసారి పరావర్తనం చెందింది. అంటే 5 లీటర్ల పాత్రలో 5 లీటర్లపాలు, 3 లీటర్ల పాత్రలో సున్న పాలు ఉన్నాయని అర్థం. అంటే 8 పాత్రలో నుంచి 5 పాత్రలోకి 5 లీటర్ల పాలు పోయాలని అర్థం.

తరవాత బంతి L దగ్గర - అంటే (2, 3) దగ్గర - పరావర్తనం చెందింది. అంటే 5 - పాత్రలో 2 లీటర్లు, 3 - పాత్రలో 3 లీటర్లు ఉన్నాయని అర్థం. అంటే 5 - పాత్రలోనుంచి 3 - పాత్రలోకి 3 లీటర్ల పాలు పోయాలని అర్థం.

తరవాత Q దగ్గర - అంటే (2, 0) దగ్గర - పరావర్తనం చెందింది. కనుక 5 - పాత్రలో 2 లీటర్లు, 3 - పాత్రలో సున్నపాలు ఉన్నాయన్నమాట. అంటే 3 - పాత్రలోని పాలను 8 - పాత్రలో పోయాలని అర్థం.

తరవాత F దగ్గర - అంటే (0.2) దగ్గర పరావర్తనం చెందింది. తరవాత H దగ్గర (5,2); తరవాత N దగ్గర - అంటే (4,3) దగ్గర తరవాత S దగ్గర - అంటే (4, 0) దగ్గర పరావర్తనం చెందుతుంది.

బంతి ఇంకా ఎదరకు వెడుతుంది కానీ, ఇంక మనకు దానితో పనిలేదు. ఏమంటే 5 లీటర్ల పాత్రలో 4 లీటర్లు ఉన్నాయి; 3 లీటర్ల పాత్ర ఖాళీగా ఉంది. అంటే 8 లీటర్ల పాత్రలో మిగిలిన 4 లీటర్ల పాలు ఉన్నాయని అర్థం. అంటే సమస్య సాధింపబడింది అన్నమాట.

దీనికే ఈ క్రిందివిధంగా పట్టిక వ్రాయవచ్చు:

| పరావర్తనం | A | B | L | Q | F | H | N | S |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 8 లీ | | | | | | | | |
| 5 లీ | 0 | 5 | 2 | 2 | 0 | 5 | 4 | 4 |
| 3 లీ | 0 | 0 | 3 | 0 | 2 | 2 | 3 | 0 |

రెండు పాత్రలలోని పాలు తెస్తే మూడవ పాత్రలో ఎన్ని పాలున్నాయో తెలియడం ఎంతసేపు?

ఈ సమస్యను సాధించడానికి ఇది ఒక్కటే మార్గం కాదు. బంతిని A నుంచి B వైపుగా కొట్టడానికి బదులు, A నుంచి D వైపుగా కొట్టవచ్చు. అప్పుడు పరావర్తన బిందువులు వరసగా A-D-R-M-G-E-P-K-S. వీటి నిర్దేశాంకములు వ్రాస్తే జవాబు ఇలా వుంటుంది:

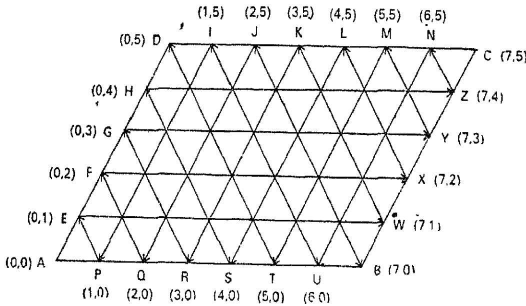
| పరావర్తనం | A | D | R | M | G | E | P | K | S |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 8 లీ | 8 | 5 | 5 | 2 | 2 | 7 | 7 | 4 | 4 |
| 5 లీ | 0 | 0 | 3 | 3 | 5 | 0 | 1 | 1 | 4 |
| 3 లీ | 0 | 3 | 0 | 3 | 1 | 1 | 0 | 3 | 0 |

ఈ పద్ధతిలో 8 ఎత్తులలో సమస్య పూర్తి అవుతుంది.

## II. 12 లీ, 7 లీ, 5 లీ సమస్య

57వ బొమ్మలో A దగ్గర మొదలు పెట్టి, అడ్డంగా ప్రయాణం చేస్తే అది పరావర్తనం అయే బిందువులు వరుసగా

B – J – Q – F – X – L – S – H – Z – N – U




వీటి నిర్దేశాంకములు ఉపయోగించి 11 ఎత్తులలో ఈ సమస్యను ఈ క్రింది విధంగా సాధించవచ్చు:

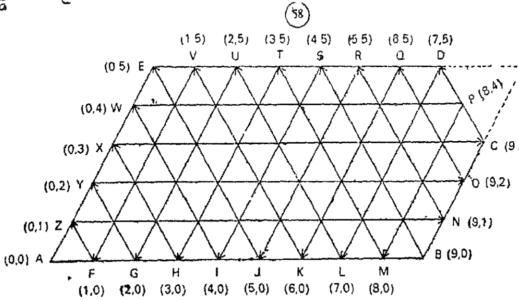
| పరావర్తనం | A | B | J | Q | F | X | L | S | H | Z | N | U |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 12 లీ | 12 | 5 | 5 | 10 | 10 | 3 | 3 | 8 | 8 | 1 | 1 | 6 |
| 7 లీ | 0 | 7 | 2 | 2 | 0 | 7 | 4 | 4 | 0 | 7 | 6 | 6 |
| 5 లీ | 0 | 0 | 5 | 0 | 2 | 2 | 5 | 0 | 4 | 4 | 5 | 0 |

A దగ్గర మొదలుపెట్టి బంతి ఏటవాలుగా D వైపు ప్రయాణం మొదలు పెడితే ఈ సమస్యకే మరొక జవాబు లభిస్తుంది, 12 ఎత్తులలో:

| పరావర్తనం | A | D | T | M | Y | G | R | K | W | E | P | I | U |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 12 లీ | 12 | 7 | 7 | 2 | 2 | 9 | 9 | 4 | 4 | 11 | 11 | 6 | 6 |
| 7 లీ | 0 | 0 | 5 | 5 | 7 | 0 | 3 | 3 | 7 | 0 | 1 | 1 | 6 |
| 5 లీ | 0 | 5 | 0 | 5 | 3 | 3 | 0 | 5 | 1 | 1 | 0 | 5 | 0 |

## III. 12 లీ. 9 లీ. 5 లీ. సమస్య

7 + 5 అనేది 12 కి సమానం కాకపోవడం చేత బిలియర్డ్స్ టేబుల్ సమాంతర చతుర్భుజాకారంలో ఉండదు. మరి దీనిని నిర్మించాలంటే అడ్డంగా 9 ప్రమాణాలూ, 60°, 120° కోణాలలో వాలుగా 5 ప్రమాణాలూ




గల సమాంతర చతుర్భుజాన్ని ముందర గీయాలి. (బొమ్మ 58) 9 + 5 – 12 = 2 కనుక 2 ప్రమాణాల సమబాహు త్రిభుజపు ముక్కను సమాంతర చతుర్భుజపు కుడివైపున పై మూలలో కత్తిరించి వెయ్యాలి. మిగిలినదే మనకు కావలసిన బిలియర్డ్స్ టేబుల్. దీనికి గోడలు 4 కాదు 5 ఉంటాయి

ఇటువంటి బల్లను తయారుచేశాక మిగిలిన దంతా మామూలే

బంతి **A** దగ్గర బయలుదేరి అడ్డంగా ప్రయాణించేస్తే పరావర్తన బిందువులు వరుసగా ఇవి

B—S—I—W—P—M—T—H—
X—C—D—L—U—G—Y—O—Q—K

| పరావర్తనం | A | B | S | I | W | P | M | T | H | X | C | D | L | U | G | Y | O | Q | K |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 12 లీ | 12 | 3 | 3 | 8 | 8 | 0 | 4 | 4 | 9 | 9 | 0 | 0 | 5 | 5 | 10 | 10 | 1 | 1 | 6 |
| 9 లీ | 0 | 9 | 4 | 4 | 0 | 8 | 8 | 3 | 3 | 0 | 9 | 7 | 7 | 2 | 2 | 0 | 9 | 6 | 6 |
| 5 లీ | 0 | 0 | 5 | 0 | 4 | 4 | 0 | 5 | 0 | 3 | 3 | 5 | 0 | 5 | 0 | 2 | 2 | 5 | 0 |

ఈ విధంగా 18 ఎత్తులలో సమస్యకి జవాబు లభిస్తుంది.

రెండవ సమాధానం :

బంతి A దగ్గర బయలుదేరి E వైపుగా ప్రయాణం చేస్తే 8 ఎత్తులలోనే పూర్తి అవుతుంది.

| పరావర్తనం | A | E | J | R | N | Z | F | V | K |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 12 లీ | 12 | 7 | 7 | 2 | 2 | 11 | 11 | 6 | 6 |
| 9 లీ | 0 | 0 | 5 | 5 | 9 | 0 | 1 | 1 | 6 |
| 5 లీ | 0 | 5 | 0 | 5 | 1 | 1 | 0 | 5 | 0 |

IV. కొన్ని అసాధ్యమైన సమస్యలున్నాయి. వాటిని ఈ బిలియర్డ్స్ ఆటతో సాధించాలనుకుంటే, కావలసిన సమాధానం రాకుండానే బంతి బయలు దేరిన చోటికి వచ్చేస్తుంది. అంటే ఆ సమస్య అసాధ్యం అని బంతి తెలియ జెప్పింది అన్నమాట.

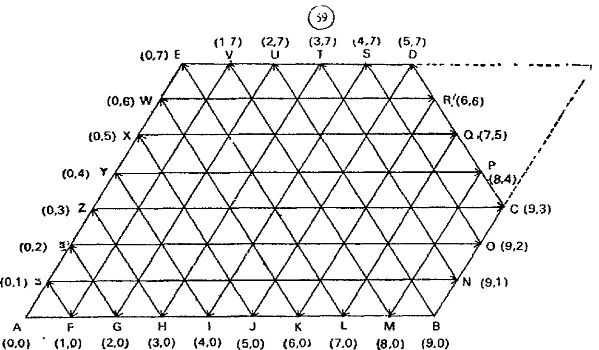
ఉదాహరణకి :

12 లీటర్లు, 9 లీటర్లు, పట్టే పాత్రలున్నాయి. వీటిలో 12 లీటర్ల పాలను రెండు సమభాగాలు చెయ్యడం ఎలాగ?

59వ బొమ్మలో బంతి A దగ్గర బయలుదేరి B వైపుగా ప్రయాణంచేస్తే 24 పరావర్తనాల తరవాత మళ్ళీ A దగ్గరకే వస్తుంది. ఈలోగా సమస్యకి కావలసిన సమాధానం రాలేదు. అంటే ఈ సమస్య అసాధ్యం అన్నమాట.

| పరా వర్తనాలు | A | B | U | G | క | O | S | I | Y | P | M | V | F | ద | N | T | H | Z | C | D | J | X | Q | L | E | A |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 12 లీ | 12 | 3 | 3 | 10 | 10 | ·1 | 1 | 8 | 8 | 0 | 4 | 4 | 11 | 11 | 2 | 2 | 9 | 9 | 0 | 0 | 7 | 7 | 0 | 5 | 5 | 12 |
| 9 లీ | 0 | 9 | 2 | 2 | 0 | 9 | 4 | 4 | 0 | 8 | 8 | 1 | 1 | 0 | 9 | 3 | 3 | 0 | 9 | 5 | 5 | 0 | 7 | 7 | 0 | 0 |
| 7 లీ | 0 | 0 | 7 | 0 | 2 | 2 | 7 | 0 | 4 | 4 | 0 | 7 | 0 | 1 | 1 | 7 | 0 | 3 | 3 | 7 | 0 | 5 | 5 | 0 | 7 | 0 |

(59)



# 43. మాయా చదరాలు

"ఆరున్నొక్కటి ఎనిమిది
సారంగా సరస నేడు నైదున్ మూడున్
రెండుం దొమ్మిది నాలుగు
వడిగూడగ పదియు నేను వచ్చును మహిలో"

అని ఏదో ఊళ్ళో దేవాలయపు గోడమీద చెక్కి ఉంది.

(60)

| 6 | 1 | 8 |
|---|---|---|
| 7 | 5 | 3 |
| 2 | 9 | 4 |

ఈ పద్యం వ్రాసినవాడి ఛందో దోషాలను క్షమించి, అతడు చెబుతున్నది ఏమిటో జాగ్రత్తగా పరిశీలిస్తే(60 వ బొమ్మలో చూపిన)"మాయాచదరం" (Magic Square) వస్తుంది. ఇది 3 $\times$ 3 గళ్ళ చదరం. 1 నుంచి 9 వరకూ గల అంకెలను ఒక్కొక్కసారి మాత్రమే ఉపయోగించి,అడ్డవరుసలు నిలువు వరసలు, - ఐమూలవరసలు ఎటుకూడినా మొత్తం 15 వచ్చేటట్లు నిర్మించిన చదరం ఇది.

ఇటువంటి మాయ చదరానికి అసాధారణ శక్తులు ఉంటాయి అన్న నమ్మకం మనదేశంలో రక్షరేకుల మీద చెక్కడానికి దారితీసిందే తప్ప, వాటి మీద పరిశోధనకి ప్రోత్సహించినట్లులేదు

యూరపులో హేమాహేమీల్లాంటి గణిత శాస్త్రజ్ఞులు ఈ మాయాచదరాల గుట్టు మట్లు తెలుసుకోడానికి శతాబ్దాల తరబడి కృషి చేశారు. వారి వారి కృషి ఫలితాలను రేఖా మాత్రంగా ఇక్కడ చూపిస్తాను.

n అడ్డగళ్ళు, n నిలువుగళ్ళు గల చదరంలో 1 నుంచి $n^2$ వరకూగల అంకెలన్నిటినీ వాడినది మళ్ళీ వాడకుండా ఉపయోగించాలి. ఆ చదరంలో అడ్డవరసలలోగాని, నిలువు వరసలలోగాని, ఐమూల వరసలలోగానీ ఉన్న అంకెల మొత్తం $= \frac{1}{2} n \left( n^2 + 1 \right)$ కి సమానం కావాలి. ఈ మొత్తాన్ని ఆ "మాయ చదరపు స్థిరాంకం" (Constant of the Magic Square) అంటారు.

ఏటవాలు గళ్ళను "కర్ణములు" (Diagonals) అంటారు.

3 $\times$ 3 కన్న తక్కువ గళ్ళతో మాయచదరం. నిర్మించడం సాధ్య పడదు.

వరుసకి 3 కన్న అధికంగా ఎన్ని గళ్ళుగల మాయచదరాన్ని అయినా నిర్మించవచ్చు. వీటి అన్నిటి నిర్మాణానికి పనికివచ్చే సామాన్య సూత్రం ఏదీ లేదుకానీ, n విలువను బట్టి మూడురకాల పద్ధతులు కనిపెట్టేరు.

(1) n = బేసిసంఖ్య అయితే మాయ చదరాన్ని నిర్మించడం చాలా సులభం.

(2) n = 4m (ద్విగుణిత సరిసంఖ్య.) అయితే మాయ చదరాన్ని నిర్మించడం కష్టతరం. సరిసంఖ్యని 2 చే భాగించినప్పటికీ సరిసంఖ్య మిగిలితే దానిని ద్విగుణిత సరిసంఖ్య అంటారు. ఉదాహరణకి 4, 8, 12, 16.... వంటి సంఖ్యలు.

(3) n=2 (2m+1) (సామాన్య సరిసంఖ్య = (Singly even number) అయితే మాయచదరాన్ని నిర్మించడం కష్టతరం.

ఇప్పుడు ఈ మూడురకాల మాయ చదరాలను నిర్మాణ పద్ధతులనూ వరసగా చూపిస్తాను.

## బేసి చదరాలు

(De la Loubere పద్ధతి)

(61)

| | 31 | 40 | 49 | 2 | 11 | 20 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 30 | 39 | 48 | 1 | 10 | 19 | 28 | 30 |
| 38 | 47 | 7 | 9 | 18 | 27 | 29 | 38 |
| 46 | 6 | 8 | 17 | 26 | 35 | 37 | 46 |
| 5 | 14 | 16 | 25 | 34 | 36 | 45 | 5 |
| 13 | 15 | 24 | 33 | 42 | 44 | 4 | 13 |
| 21 | 23 | 32 | 41 | 43 | 3 | 12 | 21 |
| 22 | 31 | 40 | 49 | 2 | 11 | 20 | |

n = 7

డీ - ల - లౌబెర్ కనుక్కున్న ఈ పద్ధతి ఒక్క బేసి చదరాలకు మాత్రమే వర్తిస్తుంది. (61 వ బొమ్మ)

సూత్రం 1 :

మొట్టమొదటగా 1ని (లేదా మొదటి అంకెను) మొదటి అడ్డ వరసలో మధ్య గడిలో వెయ్యాలి.

సూత్రం : 2

అక్కడి నుంచి 2, 3, 4, 5.... ఇల్లాగ వరుస అంకెలను ఎడమ నుంచి కుడికి క్రిందనుంచి పైకి వెళ్ళే ఏటవాలు గళ్ళ వరుసలలో వేసుకుంటూ పోవాలి.

సూత్రం : 3

ఇల్లాగ వెయ్యగా వెయ్యగా చదరం చివరకి వచ్చేశాం అనుకుందాం. అప్పుడు ఆ చదరం ఇంకా ఉంది అని ఊహించుకుని (చుక్కలతో వ్రాసిన గళ్ళు), అదే వరుసలో చదరానికి బయట ఉన్న ఊహాత్మక గడి (Imaginary Square)లో తరువాతి అంకెను వేసుకోవాలి నిజానికి అక్కడ గడి లేదు కనుక, అక్కడ ఊహాత్మక గడిలో వేయడానికి బదులు అదే నిలువు వరుసలో అట్టడుగు గడిలో (లేదా అదే అడ్డవరుసలో ఎడమవైపు చిట్టచివరి గడిలో) ఆ అంకెనే వేసుకోవాలి.

ఉదాహరణకి n = 7 చదరంలో 1 అంకెను మొదటి సూత్రం ప్రకారం పై అడ్డ వరసలో మధ్య గడిలో వేశాం. 2 ను, రెండవ సూత్ర ప్రకారం దానికి ఏటవాలుగా కుడివైపున పైనున్న గడిలో వెయ్యాలి. కాని అక్కడ గడి లేదు. కనుక ఆ ఊహాత్మక గడికి నిలువు వరుసలో కిందికి దిగి అట్టడుగు గడిలో 2 వెయ్యాలి.

తరవాత 2 వ సూత్రం ప్రకారం కుడివైపు ఏటవాలు గళ్ళలో వరుసగా 3, 4 వెయ్యాలి. తరవాత 5 వెయ్యడానికి - గళ్ళవరుస ఆఖరు అయిపోయింది కనుక - చోటులేదు. కనుక 3 వ సూత్రం ప్రకారం ఊహాత్మకమైన గడిలో తాత్కాలికంగా 5 వేసి, దానిని అదే అడ్డవరసలో ఎడమవైపున ఉన్న చిట్టచివరి గడిలోకి మార్చాలి.

తరవాత 2 వ సూత్రం ప్రకారం ఏటవాలు కుడివైపు గళ్ళలో 6, 7 వెయ్యాలి. తరవాత 8 వేయడానికి వీలులేకుండా అంతకుముందే ఆ గడిలో ఒక అంకె (1) ఉంది.

అప్పుడేంచెయ్యాలి? ఇక్కడ 4 వ సూత్రం వర్తిస్తుంది.

సూత్రం : 4

2 వ సూత్రం ప్రకారం వేయవలసిన గడి కాళీగా లేకపోతే తరువాతి అంకెను అదే నిలువు వరసలో దానికిందనున్న గడిలో వెయ్యాలి.

ఉదాహరణకు 7 తరువాత 8 ని 7 కిందనున్న గడిలో వెయ్యాలి.

ఆ తరువాత మళ్ళీ 2 వ సూత్రం ప్రకారం 9, 10 లను కుడివైపు ఏటవాలు గళ్ళలో వెయ్యాలి.

10 వేసిన తరవాత 11 వేయడానికి గడిలేదు కనుక 3 వ సూత్రం ప్రకారం తాత్కాలికంగా ఊహాత్మకమైన ఏటవాలు పై గడిలో వేసి, తరవాత దానిని అదే నిలువు వరసలో అట్టడుగు గడిలోకి మార్చాలి.

తరవాత 2 వ సూత్రం ప్రకారం 12 ను ఏటవాలు పైగడిలో వెయ్యాలి. 13 ను ఊహాత్మక గడిలోవేసి, దానిని అదే అడ్డవరసలో ఎడమవైపు చిట్టచివర గడిలోకి మార్చాలి.

ఆ తరవాత 2 వ సూత్రం ప్రకారం 14 ను ఏటవాలు గడిలో పైన వెయ్యాలి.

తరవాత 15 వేయడానికి పై ఏటవాలు గడి ఖాళీగా లేదు కనుక దానిని 4 వ సూత్రం ప్రకారం 14 కి కింది గడిలో వెయ్యాలి.

తరవాత 16, 17, 18, 19 లు 2 వ సూత్రం ప్రకారం ఏటవాలు గళ్ళల్లో వెయ్యాలి.

తరవాత 20 ని ఊహాత్మక గడిలో వేసి, 3 వ సూత్రం నిట్ట నిలువు వరసలో అట్టడుగు గడిలోకి మార్చాలి.

తరవాత 21 ని ఊహాత్మక గడిలోవేసి, అదే అడ్డువరసలో ఎడమవైపు చివరి గడిలోకి మార్చాలి.

తరవాత 22 వేయడానికి ఏటవాలు గడి ఖాళీగా లేదు. కనుక 4 వ సూత్రం ప్రకారం 21 కి కిందిగడిలో వెయ్యాలి.

అక్కడి నుంచి 2 వ సూత్రం ప్రకారం ఏటవాలు గళ్ళలో 23 నుంచి 28 వరకూ వెయ్యాలి.

అప్పుడే చదరపు కుడివైపు పై మూలగడికి చేరుకున్నాం. ఇప్పుడేం చెయ్యాలి? ఇక్కడ 5 వ సూత్రం వర్తిస్తుంది.

**సూత్రం 5 :**

పై అడ్డువరసలో కుడివైపు చివరిగడిని చేరుకున్నాక తరవాతి అంకెను దానికింద గడిలో వెయ్యాలి.

అంటే 28 కి కిందిగడిలో 29 వెయ్యాలి. ఆ తరవాత 3 వ సూత్రం ప్రకారం 30 ని ఊహాత్మక గడిలో వేసి, అదే అడ్డువరసలో ఎడమవైపు చిట్ట చివరి గడికి మార్చాలి.

తరవాత 31 ని ఊహాత్మక గడిలో వేసి, అదే నిట్టనిలువు వరసలో అట్టడుగు గడికి మార్చాలి.

ఇదేవిధంగా మిగిలిన అంకెలను సులభంగానే పూరించవచ్చు.

ఈ పద్ధతిలో మధ్య అంకె (ఈ ఉదాహరణలో 25) ఎల్లప్పుడూ మధ్య గడిలోకే రావడం గమనించదగ్గది.

ఇదే పద్ధతిలో $n = 5$ ; $n = 3$ మాయ చదరాల నిర్మాణం కూడా చూడవచ్చు. (బొమ్మలు 62, 63.)

ఈ విధంగా n విలువ ఎంత పెద్ద బేసిసంఖ్య అయినాసరే సునాయాసంగా మాయ చదరాలను నిర్మించవచ్చు.

(62)

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | 18 | 25 | 2 | 9 | |
| 17 | 24 | 1 | 8 | 15 | 17 |
| 23 | 5 | 7 | 14 | 16 | 23 |
| 4 | 6 | 13 | 20 | 22 | 4 |
| 10 | 12 | 19 | 21 | 3 | 10 |
| 11 | 18 | 25 | 2 | 9 | |

(n = 5)

ఈ చదరాలలో ఉన్న అంకెల క్రమాన్ని మార్చకుండా అడ్డువరుసలన్నిటినీ నిలువు వరుసలుగానూ, నిలువువరుసలను అడ్డువరుసలుగానూ మారిస్తే ఇంకొక చదరం వస్తుంది. ఇల్లాగే ఈ చదరాలను 90°, 180° 270°, 360° కోణములలో తిప్పితే నాలుగురకాల చదరాలు వస్తాయి.

(63)

| | | | |
|---|---|---|---|
| | 9 | 2 | |
| 8 | 1 | 6 | 8 |
| 3 | 5 | 7 | 3 |
| 4 | 9 | 2 | |

(n = 3)

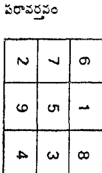
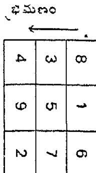
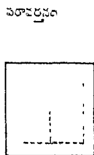
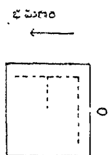
ఈ నాలుగింటినీ అద్దంలో ప్రతిఫలింపజేస్తే మరో నాలుగు చదరాలు వస్తాయి. అంటే, ఒకే మాయ చదరాన్ని భ్రమణం (Rotation) వల్లనూ, పరావర్తనం (Reflection) వల్లనూ మొత్తం 8 చదరాలుగా చేయవచ్చు.

ఇవి అన్నీ మాయచదరాలే, కానీ వీటిని వేరు వేరు మాయ చదరాలుగా పరిగణించారు. ఇవి అన్నీ కలిపి ఒక్క చదరం కిందే లెక్క.

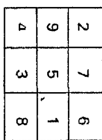
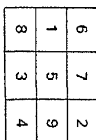
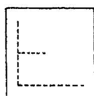
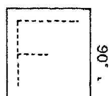
ఈ 8 చదరాలలోనూ ఏ అంకెను తీసుకున్నా దాని చుట్టుపక్కల ఉన్న అంకెల కూర్పు మారదు - ఆకాశంలో నక్షత్రాలలాగే. కనుక ఇవి అన్నీ సమానమే.

ఈ 8 రకాల చదరాలు ఎట్లా ఉంటాయో 64 వ బొమ్మలో చూపించాను.

పరావర్తనం భ్రమణం పరావర్తనం భ్రమణం

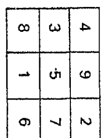
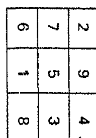
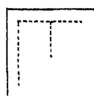
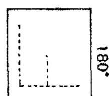





0

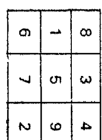
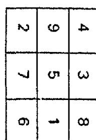
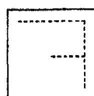
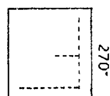





90°

(64)

180°

270°

## ద్విగుణిత సరి చదరాలు (Doubly even squares)

$n = 4, 8, 12, 16$........గళ్ళుగల ($n = 4m$) మాయ చదరాలను వ్రాసే పద్ధతి ఇప్పుడు చూద్దాం:

### 4×4 గళ్ళ మాయా చదరం

(65)

| 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|
| 5 | 6 | 7 | 8 |
| 9 | 10 | 11 | 12 |
| 13 | 14 | 15 | 16 |

4 x 4 గళ్ల తాత్కాలిక చదరం

| 16 | 2 | 3 | 13 |
|---|---|---|---|
| 5 | 11 | 10 | 8 |
| 9 | 7 | 6 | 12 |
| 4 | 14 | 15 | 1 |

4 x 4 మాయచదరం

ముందుగా 4 × 4 గళ్ళ చదరం గీసి, రెండు ముఖ్య కర్ణములను (main diagonals) 65 వ బొమ్మలో చూపినట్లు గీయాలి.

1 నుంచి 16 వరకూ గల అంకెలను ఈ 16 గళ్ళలోనూ (మొదటి అడ్డ వరసతో మొదలుపెట్టి ఎడమ నుంచి కుడివైపుకి) వరసగా వ్రాయాలి.

ముఖ్య కర్ణములు నడిచిన గళ్ళలో ఉన్న (1, 4, 6, 7, 10, 11, 13, 16 అనే) అంకెలను — వాటివాటి "కేంద్ర సౌష్ఠవస్థానాలలోని" (complementary) అంకెలను "తారుమారు" చెయ్యాలి.

కేంద్ర సౌష్ఠవ సంఖ్యలు అంటే ఏమిటో ఉదాహరణ చూపిస్తే బాగా అర్థం అవుతుంది.

65వ బొమ్మలో 1 - 16 ; 4 - 13 ; 6 - 11 ; 7 - 10 వంటివి ఇట్టి సంఖ్యలు ఏదైనా ఒక గడికి కేంద్ర సౌష్ఠవ స్థానం తెలుసుకోవాలంటే ఆ గడి నుంచి చదరపు కేంద్ర బిందువును కలుపుతూ సరళరేఖ గీసి, ఆ సరళ రేఖను మరో అంత దూరం పొడిగిస్తే వచ్చేగడి అన్నమాట.

ఈ విధంగా కేంద్ర సౌష్ఠవ సంఖ్యలను తారుమారు చేయగా వచ్చిన చదరమే మనకు కావలసిన మాయ చదరం.

A B C

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
| 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 |
| 17 | 18 | 19 | 20 | 21 | 22 | 23 | 24 |
| 25 | 26 | 27 | 28 | 29 | 30 | 31 | 32 |
| 33 | 34 | 35 | 36 | 37 | 38 | 39 | 40 |
| 41 | 42 | 43 | 44 | 45 | 46 | 47 | 48 |
| 49 | 50 | 51 | 52 | 53 | 54 | 55 | 56 |
| 57 | 58 | 59 | 60 | 61 | 62 | 63 | 64 |

H D

G F E

8×8 గళ్ళ తాత్కాలిక చదరం

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 64 | 2 | 3 | 61 | 60 | 6 | 7 | 57 |
| 9 | 55 | 54 | 12 | 13 | 51 | 50 | 16 |
| 17 | 47 | 46 | 20 | 21 | 43 | 42 | 24 |
| 40 | 26 | 27 | 37 | 36 | 30 | 31 | 33 |
| 32 | 34 | 35 | 29 | 28 | 38 | 39 | 25 |
| 41 | 23 | 22 | 44 | 45 | 19 | 18 | 48 |
| 49 | 15 | 14 | 52 | 53 | 11 | 10 | 56 |
| 8 | 58 | 59 | 5 | 4 | 62 | 63 | 1 |

8×8 గళ్ళ మాయ చదరం

ఇప్పుడు $8 \times 8$ గళ్ళ మాయచదరం నిర్మించే పద్ధతి కూడా చూపిస్తాను.

ముందర $8 \times 8$ గళ్ళ చదరం గీయాలి. దీనిని $4 \times 4$ గళ్ళ చిన్న చదరాలుగా విభజించాలి. ACEG అనేది 8 గళ్ళ చదరమైతే, ఇందులో ABOH; BCDO; ODEF; OFGH అనేవి నాలుగూ 4 గళ్ళ చదరాలు. పెద్ద చదరానికి 0 అనేది కేంద్రం.

తరువాత ఈ 4 గళ్ళ చిన్న చదరాలలో దేనికి దానికి విడివిడిగా కర్ణములను గీయాలి.

తరవాత 1 నుండి 64 వరకూ అంకెలను ఆ గళ్ళల్లో వరసగా వెయ్యాలి.

ఈ విధంగా ఏర్పడ్డ తాత్కాలిక చదరంలో కర్ణరేఖలు ప్రసరించిన గళ్ళలోని సంఖ్యలనూ, వాటి కేంద్ర సౌష్టవ సంఖ్యలనూ తారుమారు చెయ్యాలి. అంటే—

1 – 64; 4 – 61; 5 – 60; 8 – 57; 10 – 55; 11 – 54; 14 – 51; 15 – 50; 18 – 47; 19 – 46; 22 – 43; 23 – 42; 25 – 40; 28 – 37; 29 – 36; 32 – 33 అనే సౌష్టవ సంఖ్యలను తారుమారు చెయ్యాలి.

అంతే. $8 \times 8$ గళ్ళ మాయచదరం ఏర్పడుతుంది.

## సామాన్య సరి చదరాలు (Singly even squares)

$n = 2(2m + 1)$ రూపంలో వ్రాయదగ్గ 6, 10, 14, 18, 22.... గళ్ళుగల మాయచదరాలను నిర్మించే పద్ధతి (Ralph strachey's method) ఇప్పుడు వివరిస్తాను.

## $6 \times 6$ గళ్ళ మాయచదరం

సూత్రం : 1

| A | C |
|---|---|
| D | B |

(67)

ముందుగా $6 \times 6$ గళ్ళ చదరాన్ని గీసి (బొమ్మ 67) దానిని A, B, C, D అనే నాలుగు $3 \times 3$ గళ్ళ చదరాలుగా విభజించాలి.

1 నుంచి 9 వరకూ గల అంకెలను ఉపయోగించి, A అనే చదరంలో డి - ల - లౌబెర్

| 8 | 1 | 6 | 26 | 19 | 24 |
|---|---|---|---|---|---|
| 3 | 5 | 7 | 21 | 23 | 25 |
| 4 | 9 | 2 | 22 | 27 | 20 |
| 35 | 28 | 33 | 17 | 10 | 15 |
| 30 | 32 | 34 | 12 | 14 | 16 |
| 31 | 36 | 29 | 13 | 18 | 11 |

6×6 గళ్ళ తాత్కాలిక చదరం

పద్ధతిలో మాయ చదరం తయారు చెయ్యాలి.

తరవాత 10 నుంచి 18 వరకూగల అంకెలను ఉపయోగించి *B* అనే చదరంలో;

19 నుంచి 27 వరకూ అంకెల నుపయోగించి C అనె చదరంలోనూ;

28 నుంచి 36 వరకూ గల అంకెల నుపయోగించి D అనే చదరంలోనూ;

| 35 | 1 | 6 | 26 | 19 | 24 |
|---|---|---|---|---|---|
| 3 | 32 | 7 | 21 | 23 | 25 |
| 31 | 9 | 2 | 22 | 27 | 20 |
| 8 | 28 | 33 | 17 | 10 | 15 |
| 30 | 5 | 34 | 12 | 14 | 16 |
| 4 | 36 | 29 | 13 | 18 | 11 |

6×6 గళ్ళ మాయ చదరం

డి-ల-లౌబెర్ పద్ధతిలో మాయ చదరాలను తయారు చెయ్యాలి.

సూత్రం : 2

ఇప్పుడు A చదరంలో ఒక్క మధ్య అడ్డ వరసలో తప్ప మిగిలిన అన్ని అడ్డ వరసలలోనూ ఎడమ వైపున ఉన్న మొదటి m గళ్ళల్లో అంకెల చుట్టూనూ; మధ్య అడ్డ వరసలో ఎడమనుంచి మొదటిది వదిలిపెట్టి రెండవ గడినుంచి లెక్కిస్తూ వరసగా m గళ్ళల్లోని సంఖ్యల చుట్టూనూ సున్నలు గియ్యాలి.

ప్రస్తుతపు చదరంలో $n = 2(2m + 1) = 6$ కనుక $m = 1$ అవుతుంది కనుక A చదరంలో ఒకటవ, మూడవ అడ్డ వరసలలో మొదటి m గళ్ళల్లోని (అంటే మొదటి గళ్ళలోని) అంకెలచుట్టూ(అంటే 8, 4 ల చుట్టూ) సున్నలు గియ్యాలి.

మధ్య అడ్డ వరసలో మొదటిది వదిలిపెట్టి, రెండవ గడినుంచి లెక్కిస్తూ m గళ్ళలోని (అంటే 1 గడిలోని) అంకెలచుట్టూ (అంటే కేవలం 5 చుట్టూ) సున్నా చుట్టాలి.

తరవాత D చదరంలో కూడా ఇదే విధంగా 35, 32, 31 చుట్టూ సున్నలు చుట్టాలి.

తరవాత A గదిలో సున్నలు చుట్టిన అంకెలను, D గదిలో సున్నలు చుట్టిన "అనురూప" (Corresponding) సంఖ్యలనూ తారుమారు చేయాలి. అంటే 8, 35; 4, 31 ; 5, 32 లను తారుమారు చెయ్యాలి.

సూత్రం : 3

తరవాత C చదరంలో కుడివైపునుంచి మొదలు పెట్టి, అడ్డ వరుసలలో ఉన్న మొదటి (m - 1) గళ్ళలోని సంఖ్యలను; B చదరంలో వాటికి అనురూపమైన గళ్ళల్లోని అంకెలనూ తారుమారు చెయ్యాలి.

మన సమస్యలో ప్రస్తుతం m - = 1 కనుక m - 1 = 0 కనుక, ఈ 6 గళ్ళ చదరానికి ఈ మార్పు చెయ్యవలసిన అవసరం లేదు.

ఇలాచేస్తే మాయ చదరం తయారవుతుంది.

## 10×10 గళ్ళ మాయచదరం :

ఇక్కడ $n = 10 = 2(2m + 1)$

$m = 2$

A, D లలోని సున్నలు చుట్టిన అనురూప సంఖ్యలను, C, B లలోని సున్నలుచుట్టిన అనురూప సంఖ్యలనూ తారుమారు చేస్తే 10×10 గళ్ళ మాయ చదరం వస్తుంది (బొమ్మ 68.)

(68)

| | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | (17) | (24) | 1 | 8 | 15 | 67 | 74 | 51 | 58 | (65) | |
| | (23) | (5) | 7 | 14 | 16 | 73 | 55 | 57 | 64 | (66) | |
| A | 4 | (6) | (13) | 20 | 22 | 54 | 56 | 63 | 70 | (72) | C |
| | (10) | (12) | 19 | 21 | 3 | 60 | 62 | 69 | 71 | (53) | |
| | (11) | (18) | 25 | 2 | 9 | 61 | 68 | 75 | 52 | (59) | |
| | (92) | (99) | 76 | 83 | 90 | 42 | 49 | 26 | 33 | (40) | |
| | (98) | (80) | 82 | 89 | 91 | 48 | 30 | 32 | 39 | (41) | |
| D | 79 | (81) | (88) | 95 | 97 | 29 | 31 | 38 | 45 | (47) | B |
| | (85) | (87) | 94 | 96 | 78 | 35 | 37 | 44 | 46 | (27) | |
| | (86) | (93) | 100 | 77 | 84 | 36 | 43 | 50 | 27 | (34) | |

10×10 గళ్ళ తాత్కాలిక చదరం

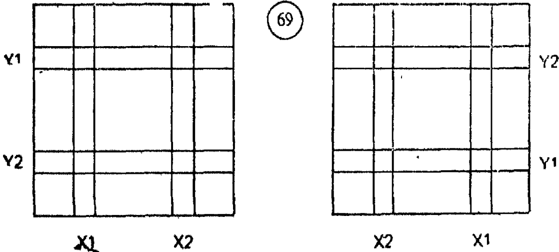
| 92 | 99 | 1 | 8 | 15 | 67 | 74 | 51 | 58 | 40 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 98 | 80 | 7 | 14 | 16 | 73 | 55 | 57 | 64 | 41 |
| 4 | 81 | 88 | 20 | 22 | 54 | 56 | 63 | 70 | 47 |
| 85 | 87 | 19 | 21 | 3 | 60 | 62 | 69 | 71 | 28 |
| 86 | 93 | 25 | 2 | 9 | 61 | 68 | 75 | 52 | 34 |
| 17 | 24 | 76 | 83 | 90 | 42 | 49 | 26 | 33 | 65 |
| 23 | 5 | 82 | 89 | 91 | 48 | 30 | 32 | 39 | 66 |
| 79 | 6 | 13 | 95 | 97 | 29 | 31 | 38 | 45 | 72 |
| 10 | 12 | 94 | 96 | 78 | 35 | 37 | 44 | 46 | 53 |
| 11 | 18 | 100 | 77 | 84 | 36 | 43 | 50 | 27 | 59 |

10 x 10 గళ్ళ మాయ చదరం

## మాయ చదరాలలో మార్పులు

**సూత్రం : 1**

ఏదైనా మాయచదరంలో కేంద్రంనుంచి సమాన దూరాలలో ఉన్న రెండు అడ్డ వరుసలను తారుమారుచేసి; కేంద్రానికి అంతేదూరంలో ఉన్న రెండు నిలువు వరసలను కూడా తారుమారుచేస్తే ఆ మాయచదరం చెడిపోదు (బొమ్మ 69).




ఈ సూత్రం సరి బేసి చదరాలు రెండింటికీ వర్తిస్తుంది.

**సూత్రం : 2**

(ఇది సరి మాయ చదరాలకు మాత్రమే వర్తిస్తుంది)

ఏదైనా సరి మాయ చదరాన్ని సరిగ్గా A, B, C, D అనే నాలుగు సమభాగాలుగా చేసి, ఏటవాలుగా ఉన్న A – C లనూ, B – D లనూ తారుమారు చేస్తే ఆ మాయచదరం చెడిపోదు (బొమ్మ 70).

(70)

| B | A |
|---|---|
| C | D |

| D | C |
|---|---|
| A | B |

సూత్రం : 3

(బేసి చదరాలకు మాత్రం)

71 వ బొమ్మలో చూపినట్లు తారుమారు చేస్తే ఈ (బేసి) మాయచదరం చెడిపోదు.

(71)

| B | a | A |
|---|---|---|
| b |  | d |
| C | c | D |

| D | c | C |
|---|---|---|
| d |  | b |
| A | a | B |

సూత్రం : 4

మాయచదరంలోని ప్రతి సంఖ్యకూ ఏదో ఒక స్థిరసంఖ్యను కలిపితే ఆ చదరపు వైచిత్రి మారదు కాని, చదరపు స్థిరాంకం మారుతుంది. n గళ్ళ మామూలు మాయచదరపు స్థిరాంకం $\frac{1}{2}n(n^2+1)$ అయితే, ప్రతి గడిలోని అంకెకూ a అనే స్థిరసంఖ్య కలిపితే దాని కొత్త స్థిరాంకం $= \frac{1}{2}n(n^2+1) + na$

సూత్రం : 5

ఏదైనా మాయచదరంలోని ప్రతి సంఖ్యనూ $(n + 1)$ లో నుంచి తీసివేస్తే మళ్ళీ అదే మాయచదరం వస్తుంది.

## మొత్తం ఎన్ని మాయచదరాలు?

వరుసకి ఇన్ని గళ్ళు అని ఇస్తే మొత్తం ఎన్ని వేరువేరు మాయచదరాలు నిర్మించవచ్చునో ఇంతవరకూ సరిగ్గా తెలియలేదు.

భ్రమణ, పరావర్తనాలు తీసివేస్తే 3 గళ్ళ చదరం ఒక్కటి మాత్రమే తయారు అవుతుంది.

4 గళ్ళ చదరాలు 880 చేయవచ్చు. 5 గళ్ళ చదరాలు, 1, 30, 00, 000 దాటుతాయి!

## ఉల్లి చదరాలు (Boardered Squares)

ఇది ఒక విచిత్రమైన చదరం. ఇందులో పైపైనగల గళ్ళవరుస (చుట్టూ ఒక పొర) తీసివేస్తే మిగిలేది కూడా మాయచదరమే! మళ్ళీ పైనున్న గళ్ళ పొర ఒకటి తీసివేస్తే మిగిలేది మళ్ళీ మాయచదరమే. ఈ విధంగా

(72)

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 77 | 1 | 2 | 3 | 4 | 72 | 71 | 70 | 69 |
| 76 | 62 | 17 | 18 | 19 | 58 | 57 | 56 | 6 |
| 75 | 61 | 51 | 29 | 30 | 48 | 47 | 21 | 7 |
| 74 | 60 | 50 | 44 | 37 | 42 | 32 | 22 | 8 |
| 9 | 23 | 33 | 39 | 41 | 43 | 49 | 59 | 73 |
| 16 | 28 | 36 | 40 | 45 | 38 | 46 | 54 | 66 |
| 15 | 27 | 35 | 53 | 52 | 34 | 31 | 55 | 67 |
| 14 | 26 | 65 | 64 | 63 | 24 | 25 | 20 | 68 |
| 13 | 81 | 80 | 79 | 77 | 10 | 11 | 12 | 5 |

9 × 9 గళ్ళ ఉల్లిచదరం

ఒక్కొక్క గళ్ళ పొర తీసివేస్తూ పోతే మిగిలినది ఎక్కడికక్కడ మాయచదరం ఒకటి — 9 × 9 గళ్ళది — ఇక్కడ ఉదాహరణకి చూపించాను (బొమ్మ 72).

9 గళ్ళ చదరపు స్థిరాంకం = 369
పై పొర తీసివేస్తే మిగిలే (62 — 56 — 20 — 26 మూల సంఖ్యలు గల)
7 గళ్ళ మాయ చదరపు స్థిరాంకం = 205
తరవాతి పొర తీసివేస్తే మిగిలే
(51 — 47 — 31 — 35 మూలసంఖ్యలు గల)
5 గళ్ళ మాయ చదరపు స్థిరాంకం = 205
తరువాతి పొర తీసివేస్తే మిగిలే
(44 — 42 — 38 — 40 మూలసంఖ్యలుగల)
3 గళ్ళ మాయచదరపు స్థిరాంకం = 123.

## ఉల్లి చదరాలను నిర్మించడం ఎల్లాగ ?

బేసి చదరాలు, సరి చదరాలు అని వీటిని రెండు తరగతులుగా విభజించవచ్చు. బేసి చదరాలకు 3 గళ్ళతోనూ, సరి చదరాలకు 3 గళ్ళతోనూ మొదలుపెట్టాలి.

సూత్రం : 1

n గళ్ళ చదరాన్ని నిర్మించాలంటే ముందుగా (n–2) గళ్ళ చదరాన్ని ఇంతకు ముందు తెలుసుకున్న పద్ధతులు ఉపయోగించి తయారుచెయ్యాలి.

ఉదాహరణకి 5 గళ్ళ ఉల్లిచదరం కావాలంటే ముందర 5 - 2 = 3 గళ్ళ చదరం శి - లా - లౌబెర్ పద్ధతిలో నిర్మించాలి (బొమ్మలో చూపినట్లు)

3 × 3 గళ్ళ మాయ చదరం

| 8 | 1 | 6 |
|---|---|---|
| 3 | 5 | 7 |
| 4 | 9 | 2 |

సూత్రం : 2

ఇప్పుడు ఇందులో ప్రతి గడిలోని అంకెకు (2n – 2) కలుపు.

మన లెక్కలో n = 5 కనుక, (2n–2) = 8 ని ప్రతిగడిలోని అంకెకూ కలపాలి.

3 గళ్ళ సామాన్య చదరం
n=3

దానిచుట్టూ ఒక పొర గళ్ళను తయారుచెయ్యాలి. ఈ పొరలో ఉండే గళ్ళ సంఖ్య = 4 (n – 1) = 4 (5–1) = 16.

ఇంక ఈ 16 గళ్ళనూ అంకెలతో నింపాలి (బొమ్మ 74).

5×5 గళ్ళ ఉల్లి చదరం

(74)

| 23 | 1 | 2 | 20 | 9 |
|---|---|---|---|---|
| 22 | 16 | 9 | 14 | 4 |
| 5 | 11 | 13 | 15 | 21 |
| 8 | 12 | 17 | 10 | 18 |
| 7 | 25 | 24 | 6 | 3 |

సూత్రం : 3

5 గళ్ళ చదరానికి వాడవలసిన అంకెలు 1 నుంచి 25 వరకునూ. అప్పుడే 9 నుంచి 17 వరకూగల అంకెలను 3 గళ్ళ చదరంలో వాడేశాం. ఇంక మిగిలినది 1 నుంచి 8 వరకూనూ, 18 నుంచి 25 వరకూనూ.

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 25 | 24 | 23 | 22 | 21 | 20 | 19 | 18 |

ఈ 16 అంకెలనూ పై పొరలో మాయ చదరం తయారయేటట్లు ఉపయోగించాలి.

ఇది కొంచెం కష్టమైన పనే. వీటిని సర్దడానికి ప్రత్యేకించి సూత్రం ఏదీ లేదు. కనుక బండగా ప్రయత్నించడమే.

కాని, ఒకమాట జ్ఞాపకం ఉంచుకోవచ్చు. ఈ 16 అంకెలనూ 8 జతలుగా చెయ్యాలి. (చూడు. బొమ్మ - 74.)

ఈ జంట సంఖ్యలను అడ్డ వరసలకూ, నిలువు వరసలకూ, కర్ణములకూ ఆచివరా ఈచివరా ఉపయోగించాలి. ఇప్పుడైనా అంత సులభమేమీకాదు.

ఈ విధంగా నిర్మించిన 5 గళ్ళ ఉల్లి చదరంతో మొదలుపెట్టి, మరి ఒక పొర గళ్ళుచేర్చి 7 గళ్ళ ఉల్లి చదరం తయారుచేయవచ్చు.

ఇప్పుడు 2 వ సూత్రాన్ని మళ్ళీ ఉపయోగించాలి. 7 గళ్ళ చదరం కావాలంటే $n = 7$ కనుక $(2n - 2) = 12$ కనుక 5 గళ్ళ చదరంలోని ప్రతి అంకెకూ 12 కలపాలి.

(75)

| 46 | 1 | 2 | 3 | 42 | 41 | 40 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 45 | 35 | 13 | 14 | 32 | 31 | 5 |
| 44 | 34 | 28 | 21 | 26 | 16 | 6 |
| 7 | 17 | 23 | 25 | 27 | 33 | 43 |
| 12 | 20 | 24 | 29 | 22 | 30 | 38 |
| 11 | 19 | 37 | 36 | 18 | 15 | 39 |
| 10 | 49 | 48 | 47 | 8 | 9 | 4 |

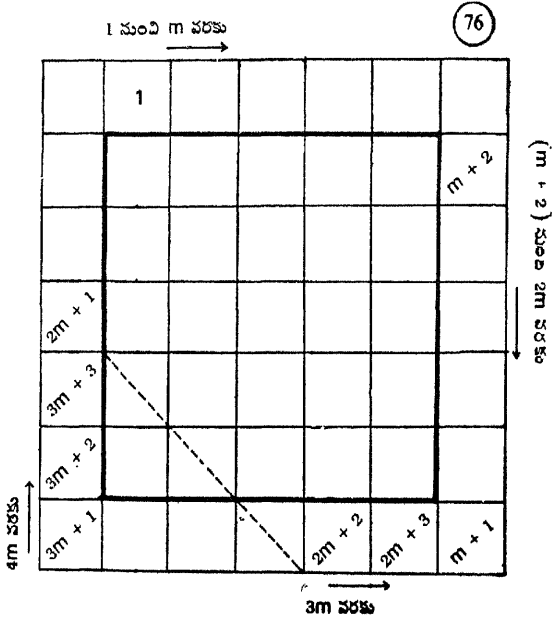
తరవాత పైపొర గళ్ళు తయారుచేసి, 1 నుంచి $(2n-2)$ వరకూనూ, $(n^2 - 2n + 3)$ నుంచి $n^2$ వరకూనూ గల అంకెలను పైపొరలో మాయ చదరం అయేటట్లు సర్దాలి. (బొమ్మ 75.)

దీనినుంచి 9 గళ్ళ ఉల్లి చదరం, 11 గళ్ళ ఉల్లి చదరం ....ఇల్లాగే ఎన్ని గళ్ళ వరకైనా చేసుకుంటూ పోవచ్చు.

వెళ్ళిన కొద్దీ పై పొరని నింపడం కష్టతరం అవుతూ పోతుంది. అయితే, పై పొర నింపడానికి **J. Travers** కనుక్కున్న పద్ధతి ఒకటి చూపిస్తాను (కొరుకుడు పడుతుందేమో) చూడండి (బొమ్మ 76).

5, 7, 9 గళ్ళ ఉల్లి చదరాలలో పైపొరలలో వ్రాసిన అంకెలను శ్రద్ధగా పరిశీలించండి.

1 నుంచి $(2n - 2)$ వరకూగల అంకెల స్థానాలను తెలుసుకోగలిగితే వాటి కాంప్లిమెంటరీ సంఖ్యలు తెలిసినట్లే కదా?




(TRAVERS.పద్ధతి)

$n = 2m + 1$ అనుకుందాం.

ఇప్పుడు పై అడ్డవరుసలో రెండవ గడినుంచి మొదలుపెట్టి 1, 2.... m వరకూనూ; క్రింది అడ్డవరుసలో ఆఖరిగడిలో $(m + 1)$; తరువాత కుడి వైపు చివరి నిలువువరుసలో పైనుంచి రెండవ గడిలో మొదలుపెట్టి $(m + 2)$ నుంచి $2m$ వరకూ;

తరవాత ఎడమవైపు నిలువు వరుసలో మధ్యగడిలో $(2m + 1)$; తరవాత $(2m + 2)$ నుంచి $3m$ వరకూ అట్టడుగు అడ్డవరుసలో కుడి వైపున;

తరువాత ఎడమవైపు నిలువు వరసలో అడుగునుంచి మొదలుపెట్టి (3m - 1) నుంచి 4m వరకూనూ వెయ్యాలి.

ఈ సూచనలతో పైపొర గళ్ళను పూరించవచ్చు.

## సరి ఉల్లి చదరాల నిర్మాణం

బేసి ఉల్లిచదరాల పద్ధతిలోనే వీటినికూడా నిర్మించవచ్చు.

77

| 1 | 8 | 10 | 15 |
|---|---|---|---|
| 12 | 13 | 3 | 6 |
| 7 | 2 | 16 | 9 |
| 14 | 11 | 5 | 4 |

ముందుగా $4 \times 4$ గళ్ళ మాయచదరం నిర్మించి, దాని మీద ఒక్కొక్క పొరనే పెంచుకుంటూ వెళ్ళాలి (బొమ్మ 77).

ఈ $4 \times 4$ గళ్ళ మాయ చదరంతో మొదలుపెట్టి $12 \times 12$ గళ్ళ ఉల్లి చదరం వరకూ పెంచబడింది.(బొమ్మ 78.)

78

| 1 | 142 | 141 | 140 | 139 | 138 | 129 | 11 | 10 | 9 | 8 | 2 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 12 | 23 | 120 | 119 | 118 | 117 | 112 | 29 | 31 | 32 | 24 | 133 |
| 15 | 39 | 41 | 102 | 101 | 100 | 99 | 47 | 48 | 42 | 106 | 130 |
| 18 | 36 | 49 | 55 | 88 | 87 | 86 | 63 | 56 | 96 | 109 | 127 |
| 19 | 40 | 52 | 83 | 65 | 72 | 74 | 79 | 62 | 93 | 105 | 126 |
| 20 | 30 | 54 | 84 | 76 | 77 | 67 | 70 | 61 | 91 | 115 | 123 |
| 132 | 110 | 95 | 60 | 71 | 66 | 80 | 73 | 85 | 50 | 35 | 13 |
| 131 | 107 | 94 | 64 | 78 | 75 | 69 | 68 | 81 | 51 | 38 | 14 |
| 128 | 111 | 92 | 89 | 57 | 58 | 59 | 82 | 90 | 53 | 34 | 17 |
| 125 | 108 | 103 | 43 | 44 | 45 | 46 | 98 | 97 | 104 | 37 | 20 |
| 124 | 121 | 25 | 26 | 27 | 28 | 33 | 116 | 114 | 113 | 122 | 21 |
| 143 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 16 | 134 | 135 | 136 | 137 | 144 |

## ద్విగుణీకృత మాయ చదరాలు

(Doubly magic squares)

ఇంతవరకూ మనం చెప్పుకున్నవి ఎటుకూడినా ఒకే స్థిరాంకం వచ్చే చదరాలను గురించి మాత్రమే. ఇప్పుడు ఈ సామాన్య లక్షణానికితోడు ప్రతి గదిలోని సంఖ్యలనూ వర్గిస్తే (Squared) కూడా మాయ చదరమే అయే ప్రత్యేక లక్షణంగల చదరాలను చూపిస్తాను.

n విలువ 8 కన్న తక్కువ అయితే ఇటువంటి వర్గ చదరాలు సాధ్యమే కాదు.

M.H. Shots కనిపెట్టిన 8 గళ్ళ ద్విగుణీకృత మాయ చదరాన్ని ఇక్కడ చూపిస్తాను (బొమ్మ 79). దీని మామూలు మాయ చదరపు స్థిరాంకం =260. దీని వర్గ మాయ చదరపు స్థిరాంకం=11180.

(79)

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 16 | 41 | 36 | 5 | 27 | 62 | 55 | 18 |
| 26 | 63 | 64 | 19 | 13 | 44 | 33 | 8 |
| 1 | 40 | 45 | 12 | 22 | 51 | 58 | 31 |
| 23 | 50 | 59 | 30 | 4 | 37 | 48 | 9 |
| 38 | 3 | 10 | 47 | 49 | 24 | 29 | 60 |
| 52 | 21 | 32 | 57 | 39 | 2 | 11 | 46 |
| 43 | 14 | 7 | 34 | 64 | 25 | 20 | 53 |
| 61 | 28 | 17 | 56 | 42 | 15 | 6 | 35 |

8 × 8 గళ్ళ ద్విగుణీకృత మాయచదరం

(80)

R V. Heath కనిపెట్టిన 9 × 9 గళ్ళ ద్విగుణీకృత మాయ చదరాన్ని కూడా చూపిస్తాను. (బొమ్మ 80.) దీని మామూలు మాయ చదరపు స్థిరాంకం = 569. వర్గ మాయ చదరపు స్థిరాంకం = 20049.

| 70 | 75 | 59 | 15 | 26 | 1 | 38 | 49 | 36 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 11 | 22 | 9 | 43 | 48 | 32 | 69 | 80 | 55 |
| 42 | 53 | 28 | 65 | 76 | 63 | 16 | 21 | 5 |
| 57 | 68 | 79 | 8 | 10 | 24 | 31 | 45 | 47 |
| 4 | 18 | 20 | 30 | 41 | 52 | 62 | 64 | 78 |
| 35 | 37 | 51 | 58 | 72 | 74 | 3 | 14 | 25 |
| 77 | 61 | 66 | 19 | 6 | 17 | 54 | 29 | 40 |
| 27 | 2 | 13 | 50 | 34 | 39 | 73 | 60 | 71 |
| 46 | 33 | 44 | 81 | 56 | 67 | 23 | 7 | 12 |

9 x 9 గళ్ళ ద్విగుణీకృత మాయాచదరం

## త్రిగుణీకృత మాయ చదరం (Trebly Magic Square)

మాయ చదరంలో ప్రతి గడిలోని సంఖ్యనూ వర్గించినా మాయ చదరం మేఘనం (cube) చేసినా మాయచదరమే. అయితే దానికి త్రిగుణీకృత మాయచదరం అంటారు. ఇటువంటిది సాధ్యమే కాని ఇంతవరకూ ఎవ్వరూ కనుక్కోలేదు. 64 × 64 గళ్ళకన్న తక్కువ గళ్ళు ఉన్న చదరంలో ఇటువంటిది సాధ్యంకాదు అని మాత్రం రుజువు చేయబడింది.

## సౌష్ఠవ చదరాలు (Symmetrical Squares)

మాయ చదరంలోనే కేంద్ర సౌష్ఠవంగల ఏ రెండు గళ్ళల్లోని అంకెలను (Skewly Related numbers) కూడినా మొత్తం $(n^2 + 1)$ వస్తే దానిని సౌష్ఠవ చదరం అంటారు.

ద్విగుణిత సరి చదరాలకు (Doubly Even Squares) (అంటే $n = 4m$) ఈ లక్షణం ఉంది. 65 బొమ్మలో చూపినది దీనికొక ఉదాహరణ. $n = 4$ కనుక $n^2 + 1 = 17$.

2,15; 8, 9; 10,7; 11,6; 3,14 ...........మొదలైనవి కేంద్ర సౌష్ఠవ సంఖ్యలు. వీటి మొత్తం 17.

డీ-ల లౌబెర్ పద్ధతి ప్రకారం నిర్మించిన బేసి చదరాలు, ఈ గ్రంథంలో చూపించిన ద్విగుణిత సరి చదరాలూ ఇటువంటి సౌష్ఠవాన్ని కలిగి ఉంటాయి సామాన్య సరి చదరాలకు (Singly Even Squares) ఈ ధర్మం లేదు. సర్వతోభద్ర చదరం (Perfect or Nasik or Pandiagonal or Diabelc Squares)

అడ్డవరసలు, నిలువు వరుసలు, ముఖ్య కర్ణములు (Main Diagonals) కూడితే స్థిరాంకం రావడమే కాకుండా, కేంద్ర సౌష్ఠవత్వం కలిగి ఉండడమే కాకుండా, ఖండిత కర్ణముల (Broken Diagonals) మొత్తం కూడా చదరపు స్థిరాంకానికి సమానం అయ్యే చదరాలను సర్వతో భద్ర చదరాలు అంటారు

(81)

| 15 | 10 | 3 | 6 |
|---|---|---|---|
| 4 | 5 | 16 | 9 |
| 14 | 11 | 2 | 7 |
| 1 | 8 | 13 | 12 |

4 x 4 సరస్వతీ భద్ర చదరం

రెండు భాగాలుగా ఖండింపబడి, ముఖ్య కర్ణానికి సమాంతరంగా రెండు వైపులా చెరో భాగమూ అమరి ఉంటాయి ఖండిత కర్ణాలు. ఈ బొమ్మలో (15, 9, 2, 8) ; (10, 4, 7, 13); (3, 5, 14, 12) ; (6, 4, 11, 13) ; (3, 9, 14, 8) ; (10, 16, 7, 1) అనేవి ఖండితకర్ణములు. వీటి మొత్తములు కూడా చదరపు స్థిరాంకారానికి (34) సమానమే.

దీనికి మరో ప్రత్యేక లక్షణంకూడా ఉంది. ఏ రెండు నిలువు వరసల మధ్యనైనా; ఏ రెండు అడ్డ వరసల మధ్యనైనా గీత గీసి, ఈ చదరాన్ని రెండు భాగాలుగా కత్తిరించి, ఈ రెండు ముక్కలనూ తారుమారు చేస్తే వచ్చే చదరంకూడా సర్వతో భద్రమే! దీనినిబట్టి ఏం తెలుస్తోంది? మనకు తోచిన అంకెలను మనకు తోచిన గడిలో ఉండేటట్లు చేయ వచ్చు నన్న మాట.

3 గళ్ళ చదరం ఒక్కటి మాత్రమే ఏర్పడుతుందని ఇంతకు ముందే చెప్పుకున్నాం; కాని అది సర్వతోభద్రం కాదు. కనుక n మూడు కన్న అధికంగా ఉండాలి. పైగా, సామాన్య సరి చదరాలు సర్వతోభద్రం కావు.

4 గళ్ళ సర్వతోభద్రాలు 48

5 గళ్ళ ,, 3600

7 గళ్ళ సర్వతో భద్రాలు 3 కోట్ల 80 లక్షల పైన
9 గళ్ళ ,, 650 కోట్లపైన
నిర్మించవచ్చునని నిరూపింపబడింది.

## 4 గళ్ళ అద్భుత చదరం - 1514

ఈ మాయ చదరాన్ని (బొమ్మ 82) తయారు చేసినది ఎవరో తెలియదు కానీ క్రీ. శ. 1514 లో దీనిని రాతిమీద చెక్కారు. దానికి అత్యద్భుతమైన ధర్మాలు కొన్ని ఉన్నాయి.

(82)

| | | | |
|---|---|---|---|
| 16 | 3 | 2 | 13 |
| 5 | 10 | 11 | 8 |
| 9 | 6 | 7 | 12 |
| 4 | 15 | 14 | 1 |

మామూలు మాయచదరాలకిలాగే 4 అడ్డ వరుసలు, 4 నిలువు వరుసలు, ముఖ్య కర్ణములు కూడితే 34 వస్తుంది.

అంతేకాదు, ఎదురెదురు జంటగళ్ళ మొత్తము కూడా 34 అవుతుంది. అంటే

$3 + 2 + 15 + 14 = 34$
$8 + 12 + 9 + 5 = 34$
$2 + 8 + 9 + 15 = 34$
$3 + 5 + 14 + 12 = 34$

$9 + 6 + 15 + 4 = 34$
$3 + 10 + 5 + 16 = 34$
$2 + 13 + 8 + 11 = 34$
$7 + 12 + 1 + 14 = 34$

ఇంతేకాదు. పై రెండు అడ్డవరుసలలోని అంకెల మొత్తం

$2 + 3 + 5 + 8 + 10 + 11 + 13 + 16 = 68$

క్రింది రెండు అడ్డవరుసలలోని అంకెల మొత్తం

$1 + 4 + 6 + 7 + 9 + 12 + 14 + 15 = 68$

ఇందులో ఆశ్చర్యం ఏమీలేదు కానీ, వీటి వర్గములు మొత్తములు కూడా సమానం కావడమే చిత్రం.

$2^2 + 3^2 + 5^2 + 8^2 + 10^2 + 11^2 + 13^2 + 16^2 = 748$
$1^2 + 4^2 + 6^2 + 7^2 + 9^2 + 12^2 + 14^2 + 15^2 = 748$

ఇంతేకాదు.

ఒకటి, మూడు అడ్డవరసలలోని అంకెలు; రెండు, నాలుగు అడ్డ వరసలలోని అంకెలు కూడా ఇదే ధర్మాన్ని కలిగి ఉన్నాయి.

$16^2 + 3^2 + 2^2 + 13^2 + 9^2 + 6^2 + 7^2 + 12 = 748$

$5^2 + 10^2 + 11^2 + 8^2 + 4^2 + 15^2 + 14^2 + 1^2 = 748$

ఇదేధర్మం నిలువు వరసలకు కూడా ఉంది.

$16^2 + 5^2 + 9^2 + 4^2 + 3^2 + 10^2 + 6^2 + 15^2 = 748$

$2^2 + 11^2 + 7^2 + 14^2 + 13^6 + 8^2 + 12^2 + 1^2 = 748$

అల్లాగే

$16^2 + 5^2 + 9^2 + 4^2 + 2^2 + 11^2 + 7^2 + 14^2 = 748$

$3^2 + 10^2 + 6^2 + 15^2 + 13^2 + 8^2 + 12^2 + 1^2 = 748$

ఈ మాయాచదరంలోని వింతలు ఇంకా ఉన్నాయి రెండు ముఖ్య కర్ణములలోని అంకెల మొత్తము, ఇవికాక మిగిలిన అన్ని అంకెల మొత్తానికి సమానం. ఇందులో వింత ఏమీలేదుకానీ, వాటి వర్గములు, ఘనములు కూడినా సరిసమానం కావడమే చిత్రం.

$16 + 10 + 7 + 1 + 4 + 6 + 11 + 13 = 68$

$2 + 8 + 12 + 14 + 15 + 9 + 5 + 3 = 68$

$16^2 + 10^2 + 7^2 + 1^2 + 4^2 + 6^2 + 11^2 + 13^2 = 748$

$2^2 + 8^2 + 12^2 + 14^2 + 15^3 + 9^2 + 5^2 + 3^2 = 748$

$16^3 + 10^3 + 7^3 + 1^3 + 4^3 + 6^3 + 11^3 + 13^3 = 9248$

$2^3 + 8^3 + 12^3 + 14^3 + 15^3 + 9^3 + 5^3 + 3^3 = 9248$

ఇంతేకాదు.

ఈ క్రింది సౌష్ఠవత్వం గమనింపదగ్గది

$2 + 8 + 9 + 15 = 3 + 5 + 12 + 14 = 34$

$2^2 + 8^2 + 9^2 + 15^2 = 3^2 + 5^2 + 12^2 + 14^2 = 374$

$2^3 + 8^3 + 9^3 + 15^3 = 3^3 + 5^3 + 12^3 + 14^3 = 4624$

ఇంతేకాదు.

ఇందులో మరో చిత్రం కూడా కనిపిస్తుంది. అడ్డవరసలలో

$16 + 3 = 19 = 15 + 4$

$11 + 8 = 19 = 7 + 12$

$5 + 10 = 15 = 9 + 6$

$2 + 13 = 15 = 14 + 1$

అల్లాగే నిలువు వరసల్లో

$16 + 5 = 21 = 13 + 8$

$15 + 6 = 21 = 7 + 14$

9 + 4 = 13 = 12 + 1
70 + 3 = 13 = 11 + 2
అంతేకాదు.

అడుగు అడ్డవరసలో మధ్యనున్న అంకెలు కలిపివ్రాస్తే 1514. ఇది ఈ చదరం చెక్కిన సంవత్సరాన్ని సూచిస్తోంది.

(83)

| 16 | 15 | 14 | 13 |
|---|---|---|---|
| 12 | 11 | 10 | 9 |
| 8 | 7 | 6 | 5 |
| 4 | 3 | 2 | 1 |

ఇన్ని అద్భుతాలను తనలో ఇముడ్చుకున్న ఈ మాయ చదరాన్ని నిర్మించడం చాలా సులభం. ముందర 4 × 4 గళ్ళ చదరం గీసి, అడుగు నుంచి పైకి, కుడి నుంచి ఎడమకి 1, 2, 3 .... 16 అంకెలు వరుసగా వెయ్యి. (బొమ్మ 83.)

తరువాత రెండు ముఖ్య కర్ణములలోని అంకెలు తప్ప మిగిలిన అంకెలన్నీ చెరిపి వెయ్యి (బొమ్మ 84). చెరిపి వేసిన ఎనిమిది అంకెలను (అంటే 2, 3, 5, 8, 9, 12, 14, 15) వరసగా పై అడ్డ వరసతో మొదలుపెట్టి, ఎడమనుంచి కుడికి ఖాళీలు ఉన్నచోట వేసుకుంటూ పో (బొమ్మ 85).

(84)

| 16 | | | 13 |
|---|---|---|---|
| | 11 | 10 | |
| | 7 | 6 | |
| 4 | | | 1 |

(85)

| 16 | 2 | 3 | 13 |
|---|---|---|---|
| 5 | 11 | 10 | 8 |
| 9 | 7 | 6 | 12 |
| 4 | 14 | 15 | 1 |

మనకు కావలసిన మాయ చదరం ఇదే. కాని, 1514 అనే సంవత్సర సంఖ్య, సరిపెట్టడానికి నడిమి నిలువు వరుసలు రెండింటినీ తారుమారు చేశారు. అంతే. దీనివల్ల చదరపు ధర్మాలు మారవు.

## 5 గళ్ళ సర్వతోభద్ర చదరం

(86)

| 7 | 20 | 3 | 11 | 24 |
|---|---|---|---|---|
| 13 | 21 | 9 | 17 | 5 |
| 19 | 2 | 15 | 23 | 6 |
| 25 | 8 | 16 | 4 | 12 |
| 1 | 14 | 22 | 10 | 18 |

5 గళ్ళ సర్వతోభద్ర

## సంయుక్త మాయ చదరాలు
(Composite Magic Squares)

n గళ్ళ పెద్ద మాయచదరాన్ని చిన్న చిన్న చదరాలుగా విభజిస్తే, ఒక్కొక్క విభాగం మళ్ళీ వేరు వేరుగా m గళ్ళ మాయచదరం అయేటట్లు నిర్మించే పద్ధతిని R.V. Heath కనుగొన్నాడు.

(87)

| 71 | 64 | 69 | 8 | 1 | 6 | 53 | 46 | 51 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 66 | 68 | 70 | 3 | 5 | 7 | 48 | 50 | 52 |
| 67 | 72 | 65 | 4 | 9 | 2 | 49 | 54 | 47 |
| 26 | 19 | 24 | 44 | 37 | 42 | 62 | 55 | 60 |
| 21 | 23 | 25 | 39 | 41 | 43 | 57 | 59 | 61 |
| 22 | 27 | 20 | 40 | 45 | 38 | 58 | 63 | 56 |
| 35 | 28 | 33 | 80 | 73 | 78 | 17 | 10 | 15 |
| 30 | 32 | 34 | 75 | 77 | 79 | 12 | 14 | 16 |
| 31 | 36 | 29 | 76 | 81 | 74 | 13 | 18 | 10 |

సంయుక్త చదరం
$m \times n$
$m = 3$
$n = 3$

(b)

| 8 | 1 | 6 |
|---|---|---|
| 3 | 5 | 7 |
| 4 | 9 | 2 |

(a)

3 × 3 గళ్ళ సామాన్య చదరం
$n = 3$

87 వ బొమ్మలో 9 × 9 గళ్ళ పెద్ద మాయ చదరం చూపబడింది. దీనిని 3 × 3 గళ్ళుగల 9 చిన్ని చదరాలుగా విభజించాం. ఈ చిన్న చదరాలన్నీ వేరువేరుగా మళ్ళీ మాయ చదరాలే!

దీనిని తయారు చేయడం ఎలాగ?

ముందర $3 \times 3$ గళ్ళ మాయ చదరం తయారు చెయ్యాలి. దీనిని పెద్ద చదరం కింద పిల్ల చదరంగా చూపించాను.

ఈ చిన్న చదరంలోని ప్రతి అంకెనీ తీసి, దాని స్థానంలో ఒక్కొక్క- $3 \times 3$ గళ్ళ మాయ చదరాన్ని ఉంచాలి. అది ఎలాగంటే - చిన్న చదరంలో 1 ఉన్నచోట (a) అనే చదరాన్ని ఉంచాలి.

తరవాత (a) అనే చదరంలోని ప్రతి అంకెకూ 9 కలిపి, వచ్చిన 3 గళ్ళ చదరాన్ని 2 ఉండే స్థానంలో ఉంచాలి.

తరవాత (a) అనే చదరంలోని ప్రతి అంకెకూ 18 కలిపి, వచ్చిన చదరాన్ని 3 ఉండే స్థానంలో ఉంచాలి.

తరవాత (a) అనే చదరంలోని ప్రతి అంకెకూ 27 కలిపి, వచ్చిన చదరాన్ని 4 ఉండే స్థానంలో ఉంచాలి.

ఇదే విధంగా చిన్న చదరంలోని ప్రతి అంకెకూ $(k-1)n^2$ కలిపి, వచ్చిన చదరాన్ని k ఉన్న స్థానంలో ఉంచాలి.

ఈ విధంగా చేసుకుంటూ వెడితే సంయుక్త చదరం ఏర్పడుతుంది.

ఈ ఉదాహరణలో $m = 3$; $n = 3$

($m$ = చిన్న చదరాల సంఖ్య

$n$ = చిన్న చదరంలోని గళ్ళ సంఖ్య)

m కి n కి వేరువేరు విలువలుండే సంయుక్త చదరాలను కూడా ఇదే విధంగా నిర్మించవచ్చు. ఉదాహరణకి: $m = 4$; $n = 3$ ఉండే సంయుక్త చదరం.

ముందుగా $m = 3$; $n = 4$ గళ్ళుగల రెండు సామాన్య మాయ చదరాలను వ్రాసి ఉంచుకోవాలి.

తరవాత 4 గళ్ళ సామాన్య చదరంలో 1 ఉన్న స్థానంలో 3 గళ్ళ సామాన్య చదరాన్ని వ్రాయాలి.

(a)

| | | |
|---|---|---|
| 8 | 1 | 6 |
| 3 | 5 | 7 |
| 4 | 9 | 2 |

3 సామాన్య చదరం

(b)

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 | 12 | 7 | 14 |
| 8 | 13 | 2 | 11 |
| 10 | 3 | 16 | 5 |
| 15 | 6 | 9 | 4 |

4 గళ్ళ సామాన్య చదరం

(88) ఆ

| | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 8 | 1 | 6 | 107 | 100 | 105 | 62 | 55 | 60 | 125 | 118 | 123 |
| 3 | 5 | 7 | 102 | 104 | 106 | 57 | 59 | 61 | 120 | 122 | 124 |
| 4 | 9 | 2 | 103 | 108 | 101 | 58 | 63 | 56 | 121 | 126 | 119 |
| 71 | 64 | 69 | 116 | 109 | 114 | 17 | 10 | 15 | 98 | 91 | 96 |
| 66 | 68 | 70 | 111 | 113 | 115 | 12 | 14 | 16 | 93 | 95 | 97 |
| 67 | 72 | 65 | 112 | 117 | 110 | 13 | 18 | 11 | 94 | 99 | 92 |
| 89 | 82 | 87 | 26 | 19 | 24 | 143 | 136 | 141 | 44 | 37 | 42 |
| 84 | 86 | 88 | 21 | 23 | 25 | 138 | 140 | 142 | 39 | 41 | 43 |
| 85 | 90 | 83 | 22 | 27 | 20 | 139 | 144 | 137 | 40 | 45 | 38 |
| 134 | 127 | 132 | 53 | 46 | 51 | 80 | 73 | 78 | 35 | 28 | 33 |
| 129 | 131 | 133 | 40 | 50 | 52 | 75 | 77 | 79 | 30 | 32 | 34 |
| 130 | 135 | 128 | 49 | 54 | 47 | 76 | 81 | 74 | 31 | 36 | 29 |

m = 4, n = 3 గళ్ళ సంయుక్త చదరం

తరవాత 3 గళ్ళ సామాన్య చదరంలోని ప్రతి అంకెకూ 9 కలిపి, ఆ వచ్చిన చదరాన్ని 4 గళ్ళ చదరంలో 2 ఉన్న స్థానంలో ఉంచాలి.

ఈ విధంగా 3 గళ్ళ సామాన్య చదరంలోని ప్రతి అంకెకూ 18, 27, 36, 45....$(K - 1)n^2$ కలపగా వచ్చిన చదరాలను 3, 4, 5, 6....k అనే అంకెలున్న స్థానంలో ఉండాలి.

ఈ విధంగా ఏర్పడ్డ $m=4$; $n=3$ గల పూర్తి సంయుక్త చదరాన్ని ఇక్కడ చూపించాను (బొమ్మ 88).

ఇదే విధంగా $m=3$; $n=4$ గళ్ళ సంయుక్త చదరంకూడా గీయవచ్చు (బొమ్మ 89).

(89)

| | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 113 | 124 | 119 | 126 | 1 | 12 | 7 | 14 | 81 | 92 | 87 | 94 |
| 120 | 125 | 114 | 123 | 8 | 13 | 2 | 11 | 88 | 93 | 82 | 91 |
| 122 | 115 | 128 | 117 | 10 | 3 | 16 | 5 | 90 | 83 | 96 | 85 |
| 127 | 118 | 121 | 116 | 15 | 6 | 9 | 4 | 95 | 86 | 89 | 84 |
| 33 | 44 | 39 | 46 | 65 | 76 | 71 | 78 | 97 | 108 | 103 | 110 |
| 40 | 45 | 34 | 43 | 72 | 77 | 66 | 75 | 104 | 109 | 98 | 107 |
| 42 | 35 | 48 | 37 | 74 | 67 | 80 | 69 | 106 | 99 | 112 | 101 |
| 47 | 38 | 41 | 36 | 79 | 70 | 73 | 68 | 111 | 102 | 105 | 100 |
| 49 | 60 | 55 | 62 | 129 | 140 | 135 | 142 | 17 | 28 | 23 | 30 |
| 56 | 61 | 50 | 59 | 136 | 141 | 130 | 139 | 24 | 29 | 18 | 27 |
| 58 | 51 | 64 | 53 | 138 | 131 | 144 | 133 | 26 | 19 | 32 | 21 |
| 63 | 54 | 57 | 52 | 143 | 134 | 137 | 132 | 31 | 22 | 25 | 20 |

$m=3$; $n=4$ గళ్ళ సంయుక్త చదరం.

ఇందులో ఉపయోగించిన 3 గళ్ళ 4 గళ్ళ సామాన్య చదరాలు ఇంతకు ముందు చూపించినవే.

## శీర్షాసనం వేసిన మాయచదరం

(90)

| 96 | 11 | 89 | 68 |
|---|---|---|---|
| 88 | 69 | 91 | 16 |
| 61 | 86 | 18 | 99 |
| 19 | 98 | 66 | 81 |

(a)

| A | I | J | B |
|---|---|---|---|
| E | M | N | G |
| F | O | P | H |
| C | K | L | D |

(b)

బొమ్మలో (90a) చూపించిన 4 × 4 గళ్ళ మాయ చదరం అతి విచిత్రమైన ధర్మాలు కలది, నాలుగు అడ్డ వరసలు, నాలుగు నిలువు వరసలు. రెండు ఐమూల వరసల మొత్తం 264 కి సమానం. ఇంతేకాదు, దీనికి గల ఇతర ధర్మాలను వివరించడానికి అనువుగా బొమ్మలో (90b) ఆయా గళ్ళను సూచించడానికి అక్షరాలు ఉపయోగించాను.

ఉదాహరణకి A అంటే 96 అనీ, B అంటే 68 అనీ........ఇల్లాగే మిగిలిన అక్షరాలన్నీ కూడా 1 వ చదరంలోని అంకెలను సూచిస్తాయని అర్థం చేసుకోవాలి.

$A + B + C + D = 264$
$E + F + G + H = 264$
$I + J + K + L = 264$
$E + I + H + L = 264$
$J + G + K + F = 264$
$M + N + O + P = 264$
$A + I + M + E = 264$
$J + B + G + N = 264$
$E + M + O + F = 264$
$N + G + H + P = 264$
$P + H + D + L = 264$
$F + O + K + C = 264$

ఇంతేకాదు.

ఈ పుస్తకాన్ని తలకిందులు చేసిచూసినా మాయ చదరమే కనిపిస్తుంది; ఇది నిజంగా అపూర్వం. తలకిందులు చేయడంవల్ల సంఖ్యలు మారిపోతాయి. అయినాసరే ఏ వరుస కూడినా 264 వస్తుంది! అంతేకాదు, పైన వర్ణించిన లక్షణాలన్నీ దీనికి కూడా ఉంటాయి!

ఈ మాయచదరంలో సుమారు 48 విధాలుగా 264 అనే మొత్తం వస్తుంది.

## అద్దంలో మాయచదరం (IX OHO XI)

దీనికి IX OHO XI అని పేరు పెట్టేరు. పేరులాగే ఈ చదరం కూడా అతి విచిత్రమైనది.

ఈ పేరును ఎడమవైపు నుంచి కుడివైపుకి చదివినా, కుడివైపు నుంచి ఎడమవైపుకి చదివినా, పుస్తకాన్ని నిలువుగా పెట్టి చదివినా, తలకిందులుగా పెట్టి చదివినా, అద్దంలో చూస్తూ మామూలుగా చదివినా, తలకిందులుగా

(91)

| 8818 | 1111 | 8188 | 1881 |
|---|---|---|---|
| 8181 | 1888 | 8811 | 1118 |
| 1811 | 8118 | 1181 | 8888 |
| 1188 | 8881 | 1818 | 8111 |

(a)

| A | I | J | B |
|---|---|---|---|
| E | M | N | G |
| F | O | P | H |
| C | K | L | D |

(b)

IX OHO XI

చదివినా IX OHO XI అనే కనిపిస్తుంది. ఇలాగే ఈ మాయ చదరానికి కూడా ఈ లక్షణాలన్నీ ఉన్నాయి!

మామూలు మాయ చదరాలకి లాగే నాలుగు అడ్డం, నాలుగు నిలువు, రెండు ఏటవాలు వరసల మొత్తం 19998 కి సమానం. మిగిలిన గమ్మత్తులు అర్థం అవడానికి అక్షరాల చదరాన్ని (91b) ఉపయోగించుకుందాం. బొమ్మ (91b) లోని అక్షరాలు IX OHO XI చదరం (92a) లోని అనురూపమైన (Corresponding) గడులలోని అంకెలను సూచిస్తాయి.

$A + B + C + D = 19998$
$E + F + G + H = 19998$
$I + J + K + L = 19998$
$J + B + D + L = 19998$
$E + I + H + L = 19998$
$J + G + K + F = 19998$

ఇంతేకాదు, దగ్గర దగ్గరగా ఉన్న ఏ నాలుగు గళ్ళు తీసుకున్నా, వాటి లోని సంఖ్యల మొత్తం 19998 కి సమానం. ఉదాహరణకి :

$A + I + M + E = 19998$
$I + J + N + M = 19998$
$J + B + G + N = 19998$

ఈ చదరాన్ని తలకిందులు చేసినా, అద్దంలో చూసినా పైలక్షణాలుండే మాయ చదరాలు ఏర్పడతాయి. అన్నిటిలోనూ మొత్తం 19998 కి సమానం.

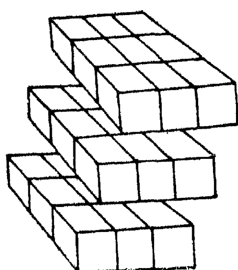
ఈ విధంగా మొత్తం 19998 కి సమానం కావడం శతాధిక సంఖ్యలో జరుగుతుంది ఈ మాయ చదరంలో.

## మాయఘనములు (Magic cubes) :

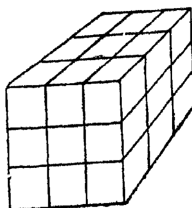
మాయ చదరములలాగే మాయఘనములు కూడా ఉన్నాయి. వీటిలో పొడవు, వెడల్పులే కాక మందంకూడా ఉంటుంది. దీనిని ఘనాపాఠీ అందామా?

92 వ బొమ్మలో $3 \times 3 \times 3$ గళ్ళ ఘనమును ఏ పొరకు ఆ పొర విడదీసి చూపించాను.

ఇందులో 1 నుంచి $n^3$ వరకూగల అంకెలను ఉపయోగించాలి. ప్రతి అడ్డవరుసలో, ప్రతి నిలువు వరుసలో, ప్రతి ఎత్తువరుసలో, నాలుగు వీటవాలు



92



వరుసలలో ఎటుకూడినా మొత్తం $\frac{1}{2}n(n^3 + 1)$ వచ్చేలా చెయ్యాలి.

(93)

| 4 | 12 | 26 | 20 | 7 | 15 | 18 | 23 | 1 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 11 | 25 | 6 | 9 | 14 | 19 | 22 | 3 | 17 |
| 27 | 5 | 10 | 13 | 21 | 8 | 2 | 16 | 24 |

క్రిందిపొర మధ్యపొర పైపొర

93 వ బొమ్మలో 3 × 3 × 3 గళ్ళ ఘనం. 1 నుంచి 27 వరకూ అంకెలు ఉపయోగించిన ఈ ఘనం స్థిరాంకం 42.

## 4 × 4 × 4 గళ్ళ సర్వతోభద్ర ఘనం

**(Pandiagonal Magic Cube)**

**R. V. Heath** తయారు చేసిన ఈ ఘనం అత్యద్భుతమైనది.

వ పొర 2వ పొర

(94)

| 1 | 8 | 61 | 60 | 48 | 41 | 20 | 21 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 62 | 59 | 2 | 7 | 19 | 22 | 47 | 42 |
| 52 | 53 | 16 | 9 | 29 | 28 | 33 | 40 |
| 15 | 10 | 51 | 54 | 34 | 39 | 30 | 27 |
| 32 | 25 | 36 | 37 | 49 | 56 | 13 | 12 |
| 35 | 38 | 31 | 26 | 14 | 11 | 50 | 55 |
| 45 | 44 | 17 | 24 | 4 | 5 | 64 | 57 |
| 18 | 23 | 46 | 43 | 63 | 58 | 3 | 6 |

4వ పొర 3వ పొర

ఇది 4 × 4 × 4 గళ్ళ సర్వతోభద్ర ఘనం (బొమ్మ 94). దీనిలోని 1, 2, 3, 4 పొరలను ఇక్కడి బొమ్మలో చూపిన విధంగా వ్రాస్తే అది 8 × 8 గళ్ళ మాయ చదరం అవుతుంది! పైగా నాలుగు పొరలూ వేరు వేరుగా 4 × 4 గళ్ళ మాయ చదరాలు! పైగా ఈ 8 × 8 గళ్ళ మాయ చదరంలో ఏ వరుస (అడ్డం, నిలువు, ఏటవాలు) లోని అంకెలను ఒకటి విడిచి ఒకటి తీసుకున్నా

వాటి మొత్తం 130 కి సమానం అవుతుంది.

## మాయ చదరాలలో మరికొన్ని రకాలు

95

| 2 | 1 | 4 |
|---|---|---|
| 3 | 5 | 7 |
| 6 | 9 | 8 |

ఇంతవరకూ ఎటుకూడినా ఒకే సంఖ్య వచ్చే మాయ చదరాలను గురించి తెలుసుకున్నాం. ఇవేకాక, ఎటు తీసి వేసినా, ఎటు గుణించినా, ఎటు భాగించినా ఒకే స్థిరసంఖ్య వచ్చే మాయచదరాలను కూడా తయారు చేయవచ్చు.

తీసివేత మాయ చదరం స్థిరాంకం = 5

ఇక్కడ ఒకటి రెండు ఉదాహరణలను మాత్రం ఇస్తాను (బొమ్మ 95)

ఏ వరుసలోనైనాసరే మొదటి అంకెను రెండవ అంకెలోనుంచి తీసివేసి, వచ్చిన దానిని మూడవ అంకెలోనుంచి తీసివేస్తే (ఏ దిశలోనైనాసరే) 5 మిగులుతుంది.

పై చదరంలో మొదటి అడ్డవరసను చూద్దాం. ఎడమనుంచి కుడికి వెడదాం. మొదటి అంకెను రెండవ అంకెలోనుంచి తీసివేస్తే (1-2) వస్తుంది. దీనిని మూడవ అంకెలోనుండి తీసివేస్తే-

$4 - (1 - 2) = 4 - 1 + 2 = 5$

ఇదే వరుసను కుడినుంచి ఎడమకు చూస్తే

$2 - (1 - 4) = 2 - 1 + 4 = 5$

ఇల్లాగే ఏ వరస చూసినా 5 వస్తుంది.

అన్నట్లు- మామూలు కూడిక చదరం తీసుకుని, దానిలోని ఏటవాలు వరుసలను తలకిందులుచేస్తే తీసివేత చదరం ఏర్పడుతుంది. తీసివేత స్థిరాంకము = (కూడిక స్థిరాంకము) $\times \frac{1}{n}$

## గుణకారపు చదరం

గుణకారపు చదరం (96)

| 12 | 1 | 18 |
|---|---|---|
| 9 | 6 | 4 |
| 2 | 36 | 3 |

3 × 3 గళ్ళ గుణకారపు చదరం
స్థిరాంకం = 216

ఏ వరుసలోని అంకెలను గుణించినా 216 వస్తుంది. ఉదాహరణకి: (బొమ్మ 96)

$12 \times 1 \times 18 = 216$

$12 \times 9 \times 2 = 216$

$2 \times 6 \times 18 = 216$

ఇలాగే మిగిలిన వరుసలకీనూ.

నిజానికి ఇది సౌష్టవ చదరం. అంటే కేంద్రానికి సౌష్టవంగా ఉన్న ఏ రెండు అంకెలు తీసుకున్నా వాటి లబ్ధములు సమానం. ఉదాహరణకి:

$1 \times 36 = 18 \times 2 = 9 \times 4 = 36$

## గుణకారపు చదరాలను తయారు చేసే పద్ధతి

ముందర ఏదో ఒక సంఖ్య తీసుకో, ఉదాహరణకి 1. దీనిని నీకు తోచిన అంకెచే గుణించు. ఉదాహరణకి 3 చే గుణిద్దాం. $1 \times 3 = 3$. ఇది (97 బొమ్మలో) అడ్డవరసలోని రెండవ సంఖ్య. ఈ రెండవ సంఖ్యని మళ్ళీ 3చే గుణించి ($3 \times 3 = 9$) మూడవ సంఖ్యగా వెయ్యి. అడ్డవరుసలన్నింటికీ గుణకం 3 అన్న మాట. అలాగే నిలువు వరసలన్నిటికీ నీకు తోచిన మరో గుణకం (ఉదాహరణకి 2) ఎన్నుకో.

గుణకారపు చదరాలను తయారుచేసే పద్ధతి

(97)

| 1 | 3 | 9 |
|---|---|---|
| 2 | 6 | 18 |
| 4 | 12 | 36 |

$1 \times 2 = 2$

$2 \times 2 = 4$

కనుక 1, 2, 4 అనే అంకెలను మొదటి నిలువు వరసలో వెయ్యి.

$3 \times 2 = 6$; $6 \times 2 = 12$

కనుక 3, 6, 12 లు రెండవ నిలువు వరుస.

$9 \times 2 = 18$; $18 \times 2 = 36$

కనుక 9, 18, 36 లు మూడవ నిలువు వరుస.

ఈ విధంగా అడ్డ, నిలువు వరసలకు 2, 3 లు గుణకముగా తీసుకుని పైన వ్రాసిన 9 అంకెలనూ తయారు చేశాం.

3 × 3 గళ్ళ గుణకారపు చదరం

(98)

| 3 | 36 | 2 |
|---|---|---|
| 4 | 6 | 9 |
| 18 | 1 | 12 |

$(\text{గుణకముల లబ్ధం})^n = \text{స్థిరాంకం}$

ఇప్పుడు ఈ అంకెలను కొద్దిగా మార్చితే మనకు కావలసిన గుణకారపు మాయ చదరం ఏర్పడుతుంది (బొమ్మ 98) దీని స్థిరాంకం $= (2 \times 3)^3 = 216$. (అంటే గుణకముల లబ్ధమునకు ఘనం).

## భాగహారపు మాయచదరం

గుణకారపు చదరం ముందుగా తయారుచేసి, దీనిలోని ఏటవాలు గళ్ళను తలకిందులుచేస్తే భాగహారపు చదరం ఏర్పడుతుంది. ఉదాహరణకి ఇంతకుముందు చూపిన గుణకారపు చదరంనుంచి ఏటవాలు గళ్ళను తల కిందులు చేయగా ఈ క్రింది భాగహారపు చదరం ఏర్పడింది (బొమ్మ 99).

3 × 3 భాగాహారపు మాయచదరం

(99)

| 12 | 36 | 18 |
|---|---|---|
| 4 | 6 | 9 |
| 2 | 1 | 3 |

స్థిరాంకము = 6
= (గుణకముల లబ్ధము)

ఏ వరుసలోనైనాసరే - మొదటిఅంకెచే రెండవఅంకెను భాగించి, వచ్చిన విభక్తముచే మూడవ అంకెను భాగిస్తే స్థిరాంకం వస్తుంది. ఈ భాగహారం ఏ దిశలో చేసినా సరే.

(100)

| 17 | 24 | 1 | 8 | 15 |
|---|---|---|---|---|
| 23 | 5 | 7 | 14 | 16 |
| 4 | 6 | 13 | 20 | 22 |
| 10 | 12 | 19 | 21 | 3 |
| 11 | 18 | 25 | 2 | 9 |

బాడిక మాయ చదరం

(101)

| 9 | 24 | 25 | 8 | 11 |
|---|---|---|---|---|
| 23 | 21 | 7 | 12 | 16 |
| 22 | 6 | 13 | 20 | 4 |
| 10 | 14 | 19 | 5 | 3 |
| 15 | 18 | 1 | 2 | 17 |

త్రిసివేత మాయచదరం

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 54 | 648 | 1 | 12 | 144 |
| 324 | 16 | 6 | 72 | 27 |
| 8 | 3 | 36 | 432 | 162 |
| 48 | 18 | 216 | 81 | 4 |
| 9 | 108 | 1296 | 2 | 24 |

గుణాకారపు మాయచదరం

(102)

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 24 | 648 | 1296 | 12 | 9 |
| 324 | 81 | 6 | 18 | 27 |
| 162 | 3 | 36 | 432 | 8 |
| 48 | 72 | 216 | 16 | 4 |
| 144 | 108 | 1 | 2 | 54 |

భాగాహారపు మాయచదరం

(103)

ఉదాహరణకి పై చదరంలో మొదటి అడ్డవరుసలో ఎడమనుంచి కుడికి 12, 36, 18 అనే అంకెలున్నాయి.

$$18 \div (36 \div 12) = 18 \div 3 = 6$$

$$12 \div (36 \div 18) = 12 \div 2 = 6$$

ఏటవాలు వరుసలు, నడిమి అడ్డువరుస, నడిమి నిలువు తలకిందులు చేయగా కూడిక చదరం తీసివేత చదరంగానూ, గుణకారపు చదరం భాగహారపు చదరంగానూ మారేయి.

# 44. చదరంగంలో మెళకువలు

నేను అప్పుడే పాతికేళ్ళ నుంచి చదరంగం ఆడుతున్నాను. మా ఊరి ఆటగాళ్ళనందరినీ ఓడించేశాను. ఒకసారి చదరంగం పోటీలకు పట్టణం వెళ్ళేను కూడాను (ప్రైజు ఏదీ రాలేదనుకోండి). ఇదంతా ఎందుకు చెబుతున్నానంటే - గొప్ప చెప్పుకోవడానికి కాదు. చదరంగం అంటే ముక్కూ మొహం తెలియని వాడిని కానని చెప్పడానికి మాత్రమే.

మా అమ్మాయి శిశిర పదేళ్ళది, ఈ మధ్యనే చదరంగం ఎలా ఆడాలో ప్రాథమిక సూత్రాలు నేర్చుకుంది. ఏ జంతువు ఎలా నడుస్తుందో తెలుసు - అంతే. ఆట వచ్చునని చెప్పడానికే వీలులేదు. తరుచు నన్ను తనతో ఆడమని విసిగిస్తూ ఉంటుంది.

ఇలా ఉండగా ఒక రోజున మా ఇంటికి ఇద్దరు పాత స్నేహితులు దీక్షితులూ, వెంకయ్య - వచ్చారు. కాలేజీలో చదువుకున్నాం మేము ముగ్గురమూనూ. ముగ్గురమూ చదరంగం అంటే చెవికోసుకునే వాళ్లం. కాని వాళ్ళిద్దరూ నాకన్న చాలా చాలా బాగా ఆడేవారు. ఈ మధ్యనే దేశం మొత్తం మీదే పెద్ద ఆటగాళ్ళు అయ్యారు. గ్రాండ్ మాస్టర్ బిరుదుకోసం ఎదురు చూస్తున్నారు.

చిన్ననాటి స్నేహితులను కలుసుకున్నందుకు నాకు అపరిమితానందం అయింది. భోజనం అయాక చదరంగం బయటికి తీశాను. ఇద్దరితోటి చెరో ఆటా ఆడేను. ఆట ఇంకా మొదలుపెట్టక మునుపే వెంకయ్య తన శకటు ఒకటి తీసి భరిణలో వేసేసి ఆడేడు. దీక్షితులు తన ఏనుగు తీసేసి ఆడేడు. రెండాటలూ నేనే ఓడిపోయాను. నిజానికి నా ఆట హనుమంతుడి ముందర కుప్పిగంతుల్లాగ అనిపించింది.

ఆట చూస్తున్న మా శిశిర రెండు ఆటలూ నేనే ఓడిపోవడం గమనించింది. వాళ్ళిద్దరితోటి తాను కూడా ఆడతానంది! మేము నవ్వేశాం. కానీ నవ్వులాటకు కాదనీ, తాను తప్పకుండా ఆడతాననీ పట్టు పట్టింది. దీక్షితులుతోనూ, వెంకయ్యతోనూ ఏక సమయంలో రెండు బల్లల మీద రెండు బలగాలతో ఆడతానంది! ముందుగా శకట్లు, ఏనుగులు వంటివి ఆటలో నుంచి తీసేసుకుని తనని అవమానించవద్దంది.

చిన్నపిల్ల సరదా పడుతోందనీ, వద్దు అంటే నేను ఏమనుకుంటానో అనీ వాళ్ళిద్దరూ మా శిశిరతో ఆడడానికి ఒప్పుకున్నారు. లోలోపల విసుక్కుంటున్నారని నాకు తెలుసు.

ఒకరితో తెల్ల బలగమూ, మరొకరితో నల్ల బలగమూ పుచ్చుకుని ఆడతానంది. రెండు ఆటలూ చెరో గదిలోనూ జరగాలనీ, తాను ఇద్దరి దగ్గరకూ వెళ్ళి ఎత్తులు వేసి వస్తూ ఉంటాననీ కూడా చెప్పింది.

బలగం అమర్చి వెంకయ్య ఒక గదిలోనూ, దీక్షితులు మరో బలగం తీసుకుని వరండాలోనూ కూర్చున్నారు. నేను వెంకయ్య దగ్గర కూర్చుని చూస్తున్నాను.

రెండుచోట్లా ఆటలు మొదలు అయ్యాయి. మా అమ్మాయి మేమున్న గదిలోకి వచ్చి ఎత్తువేసి, వరండాలోకి వెళ్ళిపోతోంది. రాను రాను వెంకయ్యకీ, నాకూ కూడా పట్టరాని ఆశ్చర్యం కలిగింది. ఇండియా అంతకీ చాంపియన్ అని పేరు తెచ్చుకున్న వెంకయ్య మా అమ్మాయి ఆట ముందు నిలువలేక పోతున్నాడు. పదేళ్ళ శిశిరకి ఇంతటి అసాధ్యపు రాకదలు, ఆటలో ఇంతటి

అసాధారణ చాతుర్యమూ ఎల్లా అలవడ్డాయో అర్థంకాక మేమిద్దరమూ విస్తు పోతున్నాం. ఎత్తు వెయ్యడానికి వెంకయ్యదే నిజానికి ఆలస్యం. మా అమ్మాయి గదిలోకి వచ్చిరాగానే బలగాన్ని ఒక్కసారి పరిశీలించి తపీమని ఎత్తు వేసేస్తోంది.

ఆఖరికి అతి కష్టంమీద వెంకయ్య ఆట డ్రా చెయ్యగలిగేడు!

అవతల వరండాలో కూర్చుని ఆడుతున్న దీక్షితులుకి కూడా ప్రాణం సుఖంగా ఏమీలేదు. చిన్న పిల్లకోటి ఆట ఏమిటన్న నిర్లక్ష్యం అతనికి రెండో ఎత్తులోనే పోగా, మా అమ్మాయి చతురంగ నైపుణ్యం ముందు గుక్కతిప్పుకో లేకపోయానని అతడే తరవాత స్వయంగా అన్నాడు. మొత్తానికి దీక్షితులుతో ఆడిన ఆట కూడా సరిసమానమై పోయింది!

మాకు ఇదేదో ఇంద్రజాలంలాగా ఉంది. పదేళ్ళపిల్ల- నిన్నకాక మొన్న జంతువుల నడకలు నేర్చుకున్నది- ఇద్దరు హేమాహేమీలను ఆదరగొట్టే సిందంటే నమ్మలేకుండా ఉన్నాను. అందులోనూ రెండు ఆటలూ సవ్యసాచి లాగ ఏకసమయంలో ఆడగలగడం మా ఊహకు అందడం లేదు. వాళ్ళిద్దరికీ చెమటలు పట్టేశాయి కానీ, మా శిశిర చిరునవ్వుతో అనాయాసంగా నిర్వహించు కుంటూ వచ్చింది.

"ఇంత టాలెంటు ఇంట్లో పెట్టుకూర్చున్నా వేమిట్రా" అని నన్ను వెంకయ్య చనువుగా మందలించాడు.

"నా మాట విని టూర్నమెంట్సుకి పంపిస్తూ ఉండు శిశిరని" అన్నాడు దీక్షితులు.

నాకు నోట మాట రాలేదు. సరే అన్నట్లు తల మాత్రం ఊపగలిగేను.

ఇందులో ఉన్న రహస్యం ఏమిటో మీకేమైనా తెలిస్తే చెప్పండి.

జ వా బు :

చాలా సులభం, ఈ పనిచేయడానికి చదరంగం ఎలా ఆడాలో కూడా తెలియనక్కరలేదు. అసలు జరిగినది ఇదీ.

వెంకయ్య తెల్ల బలగమూ, దీక్షితులు నల్ల బలగమూ తీసుకున్నారు. తెల్ల బలగం తీసుకున్న వాళ్ళు ముందర ఎత్తు వెయ్యాలని తెలుసుకదా? వెంకయ్య ముందర వేసిన ఎత్తుచూసి శిశిర వరండాలోకి వెళ్ళి, సరిగ్గా అదే ఎత్తు వేసింది. దానికి జవాబుగా దీక్షితులు వేసిన ఎత్తును వెంకయ్యతో ఆటలో తాను వేసింది. వెంకయ్య వేసిన ఎత్తులు దీక్షితులుతో ఆడిన ఆటలోనూ, దీక్షితులు వేసిన ఎత్తులను వెంకయ్యతో ఆడిన ఆటలోనూ వేస్తోంది.

అంటే నిజానికి జరిగినదేమిటంటే, అవి రెండూ వేరు వేరు ఆటలు కావు. రెండూ ఒకే ఆట కింద లెక్క. వెంకయ్య, దీక్షితులూ కూర్చుని ఆడుతున్నట్లే

అర్థం. వారిద్దరిమధ్యా శిశిర పోస్టాఫీసు లాగ పనిచేసింది. అంతే. కనుక విచిత్ర మేముంది? అయితే రెండూ డ్రా కావాలి, లేకపోతే ఒక ఆట నెగ్గి, ఒక ఆట ఓడిపోవాలి.

మొత్తం మీద అదీ సంగతి.

# 45. గుర్రపు నడకలు

కృష్ణదేవరాయలకి చదరంగం చాలా ఇష్టమైన ఆట. ఆకాలంలో బొడ్డు చర్ల తిమ్మన్న ఈ ఆటలో ఉద్దండుడు. రాజకీయ వ్యవహారాలనుంచి విశ్రాంతి దొరికినప్పుడల్లా రాచపల్లకీ పంపించి, తిమ్మన్నని పిలిపించి, చదరంగం ఆడుతూ ఉండేవాడు. పేరుమోసిన ఆటగాళ్ళు ఎంద రెందరో చుట్టూచేరి, రాయల వారికి సలహాలు ఇస్తున్నప్పటికీ చదరంగంలో అసహాయశూరుడైన తిమ్మన్న ప్రతిపక్షుల చేత మూడు చెరువుల నీళ్ళు తాగించేవాడు. రాయలు చిరునవ్వుతో ఓటమిని అంగీకరించేవాడు.

"సాహితీ సమరాంగణ సార్వభౌముల మనస్సు బహు విషయలగ్నమై ఉండడంచేత ఇల్లా జరిగిందేమోకానీ, లేకపోతే ప్రాకృతుణ్ణి నేనెంత?" అని తిమ్మన వినయం ప్రకటించేవాడు.

"గుర్రపు నడకల్లో మన తిమ్మన్నగారి చాకచక్యం అపూర్వం. వారి జోడు గుర్రాల ముందు మన ఏనుగు లేమిటి, శకటమేమిటి, ఆఖరికి మంత్రికూడా దాసోహం అనవలసిందే" అని రాయలు మెచ్చుకునేవాడు.

"అందుకేగదా ప్రభువులు తిమ్మన్నగారికి అగ్రహార ప్రదానం, గజారోహణం...."

చెయ్యి విదిలిస్తూ అర్థోక్తిలోనే "వారి ప్రతిభ ముందు అవి ఏపాటి!" అన్నాడు రాయలు.

"తమ ఆశ్రిత పక్షపాతం అల్లా అనిపింపజేస్తోంది" అని చేతులు జోడించాడు తిమ్మన్న.

"శత సంఖ్య లొక్కటైనను
సతతము శ్రీకృష్ణరాయ జగతీ పతితో
చతురంగమాడి గెలుచును
ధృతిమంతుడు బొడ్లచర్ల తిమ్మన భళిరే!"

అని రాగచ్ఛాయలో పద్యం అందుకున్నాడు ఒక భట్టు.

సంభాషణ గుర్రపు నడకమీదికి మళ్ళింది. "చదరంగంలో మిగిలిన అన్నీ జంతువులూ ఒక ఎత్తూ. గుర్రం ఒక్కటీ ఒక ఎత్తూనూ. దాని నడకే

విలక్షణమైనది.దాని దారికి అడ్డూ ఆపూ లేదు కదా? అదే దాని బలం" అన్నాడు తిమ్మన్న.

"ఆ బలం నడిపించేవాడు ప్రతిభనిబట్టి సహస్ర గుణాధికం అవుతుంది" అన్నాడు రాయలు.

"ప్రభువులు మహబాగా సెలవిప్పించారు. రౌతు కొద్దీ గుర్రం అని ఊరికే అన్నారా?" అన్నాడు శ్రోతలలో ఒకడు.

"చదరంగ బల్లమీది 64 గళ్ళల్లోనూ వెళ్ళిన గడిలోకి మళ్ళీ వెళ్ళకుండా గుర్రాన్ని నడిపించడం సాధ్యమే నంటారా?" అన్నాడు రాయలు తిమ్మన్న గారికేసి చూస్తూ.

"ఈ సమస్యమీద నేను కొంత పరిశ్రమ చేశాను. అది నిస్సందేహంగా సాధ్యమే. ప్రభువులు విశ్రాంతిగా ఉన్నప్పుడు అనుజ్ఞ ఇప్పిస్తే వచ్చి మనవి చేసుకుంటాను" అన్నాడు తిమ్మన్న.

చదరంగబల్లమీద గుర్రపు నడకల సమస్య మీద 16 వ శతాబ్దంలో బొడ్డుచర్ల తిమ్మన్నగారు చేసిన పరిశ్రమతాలూకు ఫలితం ఏమిటో ఎక్కడా నమోదు అయి ఉండకపోవడం మన దురదృష్టం.

18 వ శతాబ్దంలో ఆయిలర్ అనే ప్రసిద్ధ గణిత శాస్త్రజ్ఞుడు ఈ సమస్య మీద పరిశ్రమ చేశాడు. ఆయన సూచించిన పద్ధతి చాలా క్లిష్టమైనదీ, అన్నప్పుడూ సాధ్యంకానిదీ కావడంచేత దానిని ఇక్కడ వివరించడంలేదు.

1840 లో రోజెట్స్ అనే గణితశాస్త్రజ్ఞుడు కనిపెట్టిన పద్ధతి సమగ్రమూ బహు సులభమూ అవడంచేత దానినే ఇప్పుడు చూపిస్తాను.

## రోజెట్స్ పద్ధతిలో గుర్రపునడక

ఈ పద్ధతి $n=4m$ అని వ్రాయదగ్గ ద్విగుణిత సరిసంఖ్య గళ్ళుగల చదరాలకు (Doubly even Squares) - అంటే ఒక్కొక్క వరుసకు 8, 12, 16....గళ్ళుగల చదరాలకు - మాత్రమే వర్తిస్తుంది.

సామాన్య సరి సంఖ్య గళ్ళు - అంటే $2(2m+1)$ - గల చదరాలకూ, బేసి సంఖ్య గళ్ళుగల చదరాలకూ ఇది వర్తించదు. చదరంగబల్ల మీద వరుసకు 8 గళ్ళు ఉంటాయి కనుక ఈ పద్ధతి సరిగ్గా సరిపోతుంది.

**సూత్రం 1 :**

$8\times 8$ గళ్ళబల్లను నాలుగు సమభాగాలుగా విడదీయాలి (బొమ్మ 104). అంటే- చదరంగబల్లకి మధ్యగా ఒక నిలువు గీత, ఒక అడ్డగీతా గియ్యాలి. ఒక్కొక్క భాగంలో $4\times 4=16$ గళ్ళు ఉంటాయి.

ఈ 16 గళ్ళనీ మళ్ళీ నాలుగు సమభాగాలుగా; భాగానికి నాలుగేసి గళ్ళు ఉండేలాగా విభజించాలి. ఈ నాలుగు గళ్ళకి l, e, a, p అని పేర్లు పెట్టాలి.

(104)

| | | | |
|---|---|---|---|
| | | | |
| | 1 | 2 | |
| | 4 | 3 | |
| | | | |

1, 2, 3, 4 అనేవి చదరంగపు బల్ల మీద పదహారేసి గళ్ళ సమూహాలు.

అల్లాగే ఇవే పేర్లు మిగిలిన నాలుగు గళ్ళ సమూహాలన్నిటికీ పెట్టాలి. ఈ విధంగా పేర్లు పెట్టేటప్పుడు కొన్ని నియమాలు పాటించాలి.

సూత్రం 2:

l, p అనేవి హల్లులు

a, e అనేవి అచ్చులు

l, p, అనే గళ్ళూ, a, e అనే గళ్లూ, కర్ణముల మీద జమూలగా ఉండాలే గాని, పక్కపక్కని వ్రాయకూడదు. ఈ నియమాన్ని ప్రతి నాలుగుగళ్ళ సమూహానికీ వేరువేరుగాపాటించాలి. (బొమ్మ 105.)

(105)

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| l | e | a | p | l | e | a | p |
| a | p | l | e | a | p | l | e |
| e | l | p | a | e | l | p | a |
| p | a | e | l | p | a | e | l |
| l | e | a | p | l | e | a | p |
| a | p | l | e | a | p | l | e |
| e | l | p | a | e | l | p | a |
| p | a | e | l | p | a | e | l |

సూత్రం: 3

మొదటి నాలుగు గళ్ళ సమూహానికి l, e, a, p అని పేర్లు పెట్టాక, రెండవ

నాలుగు గళ్ళ సమూహానికీ పేర్లు పెట్టేటప్పుడు ఒక ముఖ్య విషయాన్ని గుర్తుంచుకోవాలి. అది ఏమిటంటే, l నుంచి l కీ, e నుంచి e కీ, a నుంచి a కీ, p నుంచి p కీ గుఱ్ఱపు ఎత్తు పడడానికి వీలుగా ఉండాలి.

సూత్రం 4 :

మొదటి 16 గళ్ళ సమూహానికీ పేర్లు పెట్టడం అయాక, 2, 3, 4 భాగాలలో ఇదే వరుసలలో అక్షరాలు వ్రాసెయ్యవచ్చు.

ప్రతి 16 గళ్ళ చదరంలోనూ l, p అనే హల్లులు గల గళ్ళు డైమను (Rhombus) ఆకారంలోనూ; a, e అనే అచ్చులు గల గళ్ళు చతురస్రాకారంలోనూ ఉండడం గమనించదగ్గది.

సూత్రం 5 :

ఏదో ఒక గడిలో ఏదో ఒక అక్షరం దగ్గర మొదలుపెడితే - ఉదాహరణకి మొదటి 16 గళ్ళ చదరంలోనూ ఏదో ఒక గడిలో ఉన్న l దగ్గర మొదలు పెడితే - గుఱ్ఱపు గంతులువేస్తూ చదరంగం బల్లమీద ఉన్న మొత్తం పదహారు l గళ్ళనూ చుట్టి రావచ్చు. ఒక చతుర్థ భాగంలోని అన్ని గళ్ళనూ ముందర పూర్తి చేసుకుని, తరవాత రెండవ, చతుర్థ భాగంలో అందులోని అన్ని l గళ్ళనూ పూర్తిచేసుకొని, తరువాత మూడవ, ఆ తరువాత నాలుగవ చతుర్థ భాగాలలోకి వెళ్ళాలి.

ఇదే విధంగా మిగిలిన మూడు అక్షరాలకూ (e, a, p) కూడా వర్తిస్తుంది.

ఈ నాలుగు (అక్షరాల) మార్గాలనూ ఒకదానితో ఒకటి కలిపితే 64 గళ్ళల్లోనూ గుఱ్ఱపునడక పూర్తి అవుతుంది.

ఈ గుఱ్ఱపు నడకల్లో రెండు రకాలున్నాయి.

## (క) సామాన్య మార్గం (OPEN PATH)

ఏదో ఒక గడిలో బయలుదేరి, 64 గళ్ళలోనూ ప్రవేశించి, ఏదో ఒక గడిలో అంతం అయితే, దానిని సామాన్య మార్గం అంటారు.

## (చ) చక్రీయ మార్గం (RE-ENTRANT PATH)

చదరంగపు బల్లమీది 64 గళ్ళల్లోనూ ఏదో ఒక గడిలో బయలుదేరి, గుఱ్ఱపు నడకతో అన్ని గళ్ళనూ చుట్టి, మళ్ళీ బయలుదేరిన గడిలోనే అంతం అయితే, దానిని చక్రీయ మార్గం అంటారు.

రోజెట్స్ పద్ధతిలో ఈ రెండు రకాల మార్గాలూ సాధ్యమే. వీటిని వరుసగా వివరిస్తాను.

## (క) సామాన్య మార్గం

సూత్రం : 6

ఎక్కడో ఒకచోట మొదలుపెట్టు. ఉదాహరణకి ఏదో ఒక l అనే గడిలో మొదలు పెట్టేవనుకో. ముందర l ఉన్న పదహారు గళ్ళనూ గుర్రపు నడకతో పూర్తిచెయ్యి. (బొమ్మ 106.)

తరువాత ఏదో ఒక అచ్చు, తరువాత హల్లు, తరువాత మరొక అచ్చు తీసుకుని వాటి మార్గాలను పూర్తిచేస్తే మనకు కావలసిన సామాన్య మార్గం వస్తుంది.

(106)

II

| 43 | 50 | 19 | 4 | 45 | 62 | 23 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 18 | 3 | 44 | 49 | 22 | 5 | 46 | 63 |
| 51 | 42 | 1 | 20 | 61 | 48 | 7 | 24 |
| 2 | 17 | 52 | 41 | 8 | 21 | 64 | 47 |
| 39 | 54 | 29 | 16 | 33 | 60 | 25 | 10 |
| 30 | 15 | 40 | 53 | 28 | 9 | 34 | 59 |
| 55 | 38 | 13 | 32 | 57 | 36 | 11 | 26 |
| 14 | 31 | 56 | 37 | 12 | 27 | 58 | 35 |

I   IV   III

l తో మొదలు పెడితే, l a.p-e కానీ l.e-p a కానీ వరుసగా తీసుకోవాలి. అంటే అచ్చులనూ, హల్లులనూ ఒకదాని తరవాత ఒకటిగా (Alternately) తీసుకోవాలి.

ఇక్కడ చూపించిన చదరంలో I వ భాగంలో p అనే గడిలో మొదలు పెట్టి, ముందర ఈ భాగంలోని p గళ్ళనూ, తరవాత II, III, IV భాగాలలోని P గళ్ళకూ వరుసగా పూర్తి చేశాం.

తరవాత a గళ్ళనూ, తరవాత l గళ్ళనూ, తరవాత e గళ్ళనూ పూర్తి చేశాం.

## నిర్దిష్ట ఆద్యంతములతో సామాన్య మార్గం

ఒక ప్రత్యేకమైన గడిలో మొదలుపెట్టి మరొక ప్రత్యేకమైన గడిలో అంతం కావాలని కోరితే ఏం చెయ్యాలి?

గుర్రం నల్లగడిలో ఉంటే తెల్లగడిలోకి, తెల్లగడిలో ఉంటే నల్లగడిలోకి

దూకుతుందని గుర్తుంచుకుని; మొదలు పెట్టిన గడీ, అఖరు కావలసిన గడీ వేరు వేరు రంగులవి అయి ఉండేటట్లు సమస్యను ఇవ్వాలి. ఆద్యంత స్థానాలు ఒకే రంగువి అయితే ఆ సమస్య అసాధ్యం కాదా?

సౌలభ్యం కోసం చదరంగపు బల్లమీది 64 గళ్ళకు పేర్లు పెట్టుకుందాం. దీనిని "x - y కో ఆర్డినేట్ల" తో సూచిస్తారు. దీనిని 107 వ బొమ్మలో చూడవచ్చు.

**107**

| నిలువు | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 8 | 18 l | 28 e | 38 a | 48 p | 58 l | 68 e | 78 a | 88 p |
| 7 | 17 a | 27 p | 37 l | 47 e | 57 a | 67 p | 77 l | 87 e |
| 6 | 16 e | 26 l | 36 p | 46 a | 56 e | 66 l | 76 p | 86 a |
| 5 | 15 p | 25 a | 35 e | 45 l | 55 p | 65 a | 75 e | 85 l |
| 4 | 14 l | 24 e | 34 a | 44 p | 54 l | 64 e | 74 a | 84 p |
| 3 | 13 a | 23 p | 33 l | 43 e | 53 a | 63 p | 73 l | 83 e |
| 2 | 12 e | 22 l | 32 p | 42 a | 52 e | 62 l | 72 p | 82 a |
| 1 | 11 p | 21 a | 31 e | 41 l | 51 p | 61 a | 71 e | 81 l |
| 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |

అడ్డం

ఇందులోని అంకెలకు అర్థం ఏమిటంటే- ఏదైనా గడిని చేరుకోవడానికి అడ్డంగా ఎన్నిగళ్ళు నడవాలో మొదటి అంకె, నిలువునా ఎన్నిగళ్ళు వెళ్ళాలో రెండవ అంకె తెలియజేస్తాయి. ఉదాహరణకి : 37 అనే అంకె ఉన్న గడిని చేరుకోడానికి 0 దగ్గర బయలుదేరి 3 గళ్ళు అడ్డంగా కుడివైపుకి నడిచి, 7 గళ్ళు నిలువుగా పైకి నడవాలి అని అర్థం.

ఇప్పుడు మన సమస్య (నిర్దిష్ట ఆద్యంతములతో గుర్రపు నడక) దగ్గరకు మళ్ళీ వద్దాం.

## కేసు 1

ఒక హల్లుగడిలో మొదలుపెట్టి ఒక అచ్చుగడిలో అంతం కావాలి అనుకుందాం.

ఉదాహరణకి (37) వ గడిలో మొదలుపెట్టి (83) వ గడిలో అంతం కావాలి అంటే ఏం చెయ్యాలి ?

(37) వ గడిలో ఉన్నది l

(83) వ గడిలో ఉన్నది e

సూత్రం 7 :

ఇటువంటి సమస్య ఇచ్చినప్పుడు (37) వ గడిలోని l తో మొదలుపెట్టి l యొక్క 16 గళ్లూ చుట్టిరావాలి. ఆఖరున e అనే అచ్చుయొక్క 16 గళ్లూ పూర్తిచెయ్యాలి. కనుక, l, a p, e, అనే వరుసలో పూర్తి చెయ్యాలి. (బొమ్మ 108).

(108)

| 2 | 55 | 26 | 35 | 6 | 57 | 22 | 34 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 27 | 34 | 1 | 56 | 23 | 38 | 7 | 58 |
| 54 | 3 | 36 | 25 | 60 | 5 | 40 | 21 |
| 33 | 28 | 53 | 4 | 37 | 24 | 59 | 8 |
| 14 | 51 | 32 | 45 | 12 | 61 | 20 | 41 |
| 29 | 48 | 13 | 52 | 17 | 44 | 9 | 64 |
| 50 | 15 | 46 | 31 | 62 | 11 | 42 | 19 |
| 47 | 30 | 49 | 16 | 43 | 18 | 63 | 10 |

## కేసు 2

ఆద్యంతములు రెండూ అచ్చులుగానీ, రెండూ హల్లులుగానీ అయితే ఏం చెయ్యాలి ?

సూత్రం 8 :

అంతం కావలసిన 64 వ గడి z అనుకో (బొమ్మ 109). అదే అక్షరం కలిగి ఉండి, దానికి గుర్రపుదెత్తు దూరంలో ఉన్న ఒక గడికి y అని పేరు పెట్టు. తరువాత y అనే గడికి గుర్రపు దెత్తు దూరంలో ఉన్న మరొక

జాతి గడికి x అని పేరుపెట్టు. అంటే x-y అనే గడి అచ్చుది అయితే x అనే గడి హల్లుది. లేదా y అనే గడి హల్లుది అయితే x అనే గడి అచ్చుది అన్నమాట.

ఇప్పుడు y, z అనే గళ్ళు మినహాయించి, మిగతా గళ్ళు అన్నీ పైన చెప్పిన సూత్రం ప్రకారం పూర్తి చేసుకుంటూ వచ్చి, x అనే గడి 62 వది అయేటట్లు చెయ్యి. అప్పుడు y = 63 వది, z = 64 వది చేయవచ్చు.

అయితే x ని 52 వదిగా చేయడం ఎల్లాగ ? ఒక ఉదాహరణ చూపిస్తే బాగా తెలుస్తుంది.

107 వ బొమ్మలోని (26) అనే గడిలో మొదలు పెట్టి, (72) అనే గడిలో అంతం అయే గుర్రపు దారి కావాలి అనుకుందాం.

(109)

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 2 | 19 | 58 | 39 | 6 | 21 | 60 | 37 |
| 57 | 40 | 3 | 20 | 59 | 38 | 7 | 22 |
| 18 | 1 | 42 | 55 | 24 | 5 | 36 | 61 |
| 41 | 56 | 17 | 4 | 35 | 62 X | 23 | 8 |
| 16 | 31 | 54 | 43 | 12 | 25 | 48 | 63 Y |
| 53 | 44 | 13 | 32 | 47 | 34 | 9 | 26 |
| 30 | 15 | 46 | 51 | 28 | 11 | 64 Z | 49 |
| 45 | 52 | 29 | 14 | 33 | 50 | 27 | 10 |

(26) అనే గడి 1 అనే హల్లుది.

(72) అనే గడి p అనే హల్లుది.

ఇల్లా ఇచ్చినప్పుడు :

64 వ గడి = (72) = z = p గడి

63 వ గడి = (84) = y = p గడి

62 వ గడి = (65) = x = a గడి

x గడి 62 వది అవాలంటే - మొదట (26) లో 1 అనే హల్లుతో మొదలు పెట్టాలి. తరవాత e అనే అచ్చును పూర్తి చెయ్యాలి. తరవాత p అనే అచ్చును నడిపిస్తూ దారిలో y, z అనే గళ్ళను వదిలిపెట్టి 14 గళ్ళు మాత్రమే పూర్తి చెయ్యాలి. ఆ తరువాత a అనే అచ్చును నడిపిస్తూ చిట్ట చివరి గంతు x గడిలో పడేటట్లు చూడాలి. ఆ తరువాత y, ఆ తరువాత z గదులలో అడుగు పెట్టాలి.

## చక్రీయ మార్గం

చక్రీయ మార్గం కావాలంటే—మొదటి గడినీ, దానికి గుర్రపు ఎత్తు దూరంలో చివరి గడినీ ఎన్నుకోవాలి. నిర్దిష్టమైన ఆద్యంతములకు చెప్పిన రెండు సూత్రాలనూ సందర్భానుసారంగా ఉపయోగించాలి.

## సగం బల్లపై గుర్రపు నడకలు

చదరంగపు బల్లను రెండు సమాన భాగాలుగా విడదీసి, గుర్రపు

(110)

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 35 | 62 | 45 | 56 | 37 | 60 | 41 | 50 |
| 46 | 55 | 36 | 61 | 44 | 49 | 38 | 59 |
| 63 | 34 | 53 | 48 | 57 | 40 | 51 | 42 |
| 54 | 47 | 64 | 33 | 52 | 43 | 58 | 39 |
| 1 | 32 | 13 | 24 | 5 | 28 | 11 | 18 |
| 14 | 23 | 4 | 29 | 12 | 17 | 8 | 27 |
| 31 | 2 | 21 | 16 | 25 | 6 | 19 | 10 |
| 22 | 15 | 30 | 3 | 20 | 9 | 26 | 7 |

నడకతో ముందర ఒక అర్ధభాగాన్ని పూరించి, ఆ తరవాత రెండవ భాగాన్ని పూరించాలి; పైగా అది చక్రీయ మార్గం కావాలి.

బల్లను అడ్డగీతతో రెండు సమభాగాలు చేశాం. ముందర అడుగుభాగాన్ని పూరించి, తరువాత పైభాగానికి వెడదాం. (బొమ్మ 110).

ముందర 1, 32 అనే అంకెలను అడుగునుంచి నాలుగవ అడ్డ వరుసలో వేరువేరు రంగు గళ్ళలో ఎక్కడో అక్కడ వెయ్యి. ఇక్కడ 1 ఉన్న గడి అది, 32 ఉన్నది అంతమూనూ. నిర్దిష్ట ఆద్యంత సూత్రాలలో ఏదో ఒకటి ఉపయోగించి, 1 నుంచి 32 వరకూ క్రింది అర్ధభాగాన్ని గుర్రపు నడకతో పూరించు.

ఇక్కడ చూపించిన ఉదాహరణలో (14) గడిలో 1 అనే అంకెను వేశాం. ఇది l గడి.

(24) గడిలో 32 అనే అంకెను వేశాం. ఇది e గడి. కనుక l, a, p, e అనే వరుసలో బయలుదేరాలి. ప్రతి అక్షరం తాలూకు కింది 8 గళ్ళనూ పూరించుకుంటూ వెళ్ళాలి.

ఇంక పైఅర్ధభాగంలోకి వెళ్ళేముందు 33 వ ఎత్తు,64 వ ఎత్తు పడవలసిన స్థానాలను నిర్ణయించుకోవాలి. 1 నుంచి 64 కీ, 32 నుంచి 33 కీ గుర్రపు ఎత్తులు పడేటట్లు చూచుకోవాలి.

అంతేకాదు, 64, 33 ల స్థానాలు వేరు వేరు రంగు గళ్ళు అయివుండాలి. ఈ నియమాలకు అనుగుణంగా 64 వ అంకెను (35) లో వేశాం. ఇది e గడి. 33 వ అంకెను, (45) లో వేశాం. ఇది l గడి. కనుక పైనున్న 32 గళ్ళనూ l, a, p, e అనే వరుసలో పూరించాలి.

అప్పుడు మనకు కావలసిన మార్గం వస్తుంది.

## రాచనడకలతో చక్రీయమార్గం

చదరంగం బల్లమీద రాజును నడిపిస్తూ, వెళ్ళిన గడిలోకి మళ్ళీ వెళ్ళకుండా చక్రీయమార్గాలు చాలానే నిర్మించవచ్చు. కాని, ఇక్కడ చూపిన చదరం ప్రత్యేకత ఏమిటంటే- ఇది మాయచదరం కూడా అయింది. (బొమ్మ 111.)

(111)

| 61 | 62 | 63 | 64 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 60 | 11 | 58 | 57 | 8 | 7 | 54 | 5 |
| 12 | 59 | 10 | 9 | 56 | 55 | 6 | 53 |
| 13 | 14 | 15 | 16 | 49 | 50 | 51 | 52 |
| 20 | 19 | 18 | 17 | 48 | 47 | 46 | 45 |
| 21 | 38 | 23 | 24 | 41 | 42 | 27 | 44 |
| 37 | 22 | 39 | 40 | 25 | 26 | 43 | 28 |
| 36 | 35 | 34 | 33 | 32 | 31 | 30 | 29 |

రాచనడకల (ఇదే మంత్రి నడకలతో కూడా) చక్రీయమార్గమైన మాయచదరం.

## గజగమనంతో చక్రీయమార్గం

(11) - (18) - (88) - (81) - (71) - (77) - (67) - (61) - (51) - (57) - (47) - (31) - (37) - (27) - (21).

## శకటగమనంతో చక్రీయమార్గం

అన్నీ తెల్లగళ్ళు గానీ, అన్నీ నల్లగళ్ళుగానీ 17 ఎత్తులతో చక్రీయ గమనం చేస్తుంది శకటం.

(11) - (55) - (82) - (71) - (17) - (28) - (46) - (13) - (31) - (86) - (68) - (57) - (48) - (15) - (51) - (84) - (66) - (88).

## నాకీ రచనలో తోడ్పడ్డ గ్రంథావళి

1. Riddles in Mathematics By E. P. Northorp
2. Mathematical Puzzles and Pastimes By A. Bakst
3. Mathematical Recreations and Essays By W.W. Rouse Ball
4. Mathematical Recreations By Maurice Kraitchik
5. Magic House of Numbers By I. Adler
6. Mathematical Puzzles and Diversions By Martin Gardner
7. Mathematics, Magic and Mystery By Martin Gardne.
8. Mathematical, Puzzles By G. Mott . Smith
9. Puzzle - Math By George Gamow & Marvin Stern
10. Play Mathematics By H. Langman
11. Figures for Fun By Yakov Perelman
12. Mathematical Excursions By H.A. Merril
13. Fascination of Numbers By W J. Reichmann
14. Math is Fun By Joseph Degrazia
15. Recreations in Mathematics By H.E. Licks
16. Fun With Mathematics By Jerome S Meyer
17. The Magic of Numbers By Robert Tocquet
18. Romance in Mathematics By M.E. Bowman
19. Numbers Fun and Facts By J.N. Friend
20. Mathematical Puzzles of Sam Loyd By Martin Gard





## రచయిత గురించి

**స్వా**తంత్ర్యోద్యమ సమరంలో ముగ్గురు కుటుంబ సభ్యులను జైలుకు పంపిన దేశభక్తుల ఇంట్లో - మూడు తరాలుగా విప్లవ సాహిత్య చర్చలకు వేదికగా నిల్చిన ముంగిట్లో - ఛాందసాన్ని వెలివేసిన పండిత కుటుంబంలో - 1933లో - తూర్పు గోదావరి జిల్లా ముంగండలో జననం. 1953-55లో ఉస్మానియా యూనివర్సిటీ నుంచి ఫిజిక్సులో మాస్టర్స్ డిగ్రీ. 1960-63లో మాస్కో యూనివర్సిటీ నుంచి డాక్టరేటు డిగ్రీ తీసుకున్నారు. 1969-71లో స్వీడన్‌లోని ఉప్సాలా ఆయనోస్ఫెరిక్ అబ్జర్వేటరీలోనూ, 1974-75లో బల్గేరియన్ అకాడమీ ఆఫ్ సైన్సెస్‌లోనూ, 1981-82లో ఇంగ్లండులో యూనివర్సిటీ కాలేజ్ ఆఫ్ వేల్స్‌లోనూ స్పేస్ రీసెర్చ్ చేశారు. ఢిల్లీలోని నేషనల్ ఫిజికల్ లేబరేటరీలో డిప్యూటి డైరెక్టరుగా అంతరిక్ష పరిశోధన చేస్తూ 18 రాకెట్టు ప్రయోగాలలో పాల్గొని, 1993 లో రిటైరు అయ్యారు.

15వ ఏట నుంచీ కవిత్వ రచనలో ప్రవేశం ఉన్న నళినీమోహన్ పాపులర్ సైన్సులో 38 పుస్తకాలు, పిల్లలకోసం 18 పుస్తకాలు, కవితలూ, వ్యాసాలు వగైరా 9 పుస్తకాలు రాశారు. వివిధ తెలుగు పత్రికలలో వీరి రచనలు 1550కి పైగా ప్రచురితమయ్యాయి. 1968లో కవికోకిల శ్రీ దువ్వూరి రామిరెడ్డి విజ్ఞాన బహుమతిని వైజ్ఞానిక రచనలద్వారా ప్రజాబాహుళ్యానికి సైన్సుమీద అభిమానం కలిగిస్తున్నందుకు, 1986లో ఇందిరాగాంధి విజ్ఞాన బహుమతిని ప్రప్రథమంగానూ అందుకున్నారు. ఆంధ్రజ్యోతి వీక్లీ నిర్వహించిన బ్యాలెట్‌లో 1986లో తెలుగువారిలో ప్రముఖ వ్యక్తిగా ఎన్నిక అయ్యారు. 1992లో పిల్లలలో సైన్సుభావాల వ్యాప్తికి ఉత్తమకృషి చేసినందుకు ఎన్.సి.ఎస్.టి.సి. వారిచే జాతీయ అవార్డు అందుకున్నారు. 1993లో హాస్య రచనలకై తెలుగు యూనివర్సిటీ వారి బులుసు బుచ్చి సర్వారాయుడు ప్రతిభా పురస్కారాన్నీ, 1994లో సన్నపనేని మంగాదేవి బాలసాహిత్య పురస్కారాన్నీ ప్రప్రథమంగానూ అందుకున్నారు.

సుప్రసిద్ధ నవలా రచయిత, జర్నలిస్టు కీ॥శే॥ మహీధర రామమోహనరావు గారు వీరి తండ్రి. బహుగ్రంథకర్త శ్రీ మహీధర జగన్మోహనరావు గారు వీరి పినతండ్రి.